WISKUNDIG TIJDSCHRIFT

ONDER REDACTIE VAN

F. J. VAES, Chr. KREDIET

en Dr. N. QUINT.

2de Jaargang

P. VISSER AZN. 1905/1906 HAARLEM.

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

510.5
WI
V.2

MATHEMATICS
DEPARTMENT

MATH LIBRARY
216 ALTGELD
HALL

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

SEP 3 1980 KK
SEP 8 REC'D

L161—O-1096

Wiskundig Tijdschrift.

ONDER REDACTIE VAN

F. J VAES, Chr. KREDIET en Dr. N. QUINT.

MET MEDEWERKING VAN

K. BES, C. A. CIKOT, H. A. DERKSEN, Dr. R. H. VAN DORSTEN, N L
W. A. GRAVELAAR, Dr. A. D. VAN DER HARST, C. KNAPPER Kz.,
G. L. N. H. DE LAIVE, M. VAN OVEREEM Jr., Dr. C. STOLP,
J. VERSLUYS, J. N. VISSCHERS, G. J. VAN DE WELL,
W. H. WISSELINK, L VAN ZANTEN e. a.

Tweede Jaargang.
1905 – 1906.

BLOM & OLIVIERSE. — CULEMBORG.

INHOUDSOPGAVE 2den Jaargang.

BLZ.

INLEIDING 1

Rekenkunde.

J. N. VISSCHERS, Oude Rekenopgaven met naschrift van F J. VAES. 235

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

Het kwadraat van een getal van twee cijfers, waarvan het eerste een 5 is 115
Als *a*, *b*, *c* rekenkundig, *b*, *c*, *d* meetkundig en *c*, *d*, *e* harmonisch evenredig zijn, dan zullen ook *a*, *c*, *e* meetkundig evenredig wezen . . . 115
Uitbreiding eener bekende rekenkundige herleiding 174
Vraag en Antwoord 5, 8, 11.

Elementaire Algebra.

Dr. N. QUINT, Elementaire berekening van logarithmen 15, 57
F. T. A. CEDEE, Het meetbaar maken van den noemer 17
H. G. A. VERKAART, Deelbaarheid van eenige algebraïsche vormen 156
O. POSTMA, Een moeilijkheid bij wortelvormen . 160
G J KROON, Het meetbaar maken van den noemer $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots \sqrt{a_p}$ 166
H. G. A VERKAART, Deelbaarheid van $a^p - a$ door p 238

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

Als de som van twee veranderlijke grootheden maximum is als die twee grootheden gelijk zijn, dan is tegelijkertijd de som van hunne omgekeerden minimum 108
Vraag en Antwoord 6, 10.
Correspondentie 252, 253, 254

Hoogere Algebra.

K. BES, Uit de theorie der Algebraïsche vergelijkingen 2, 49
Vraag en Antwoord 4

Goniometrie, Trigonometrie

O. BENING, Een meetkundig bewijs voor de formules : $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$, en $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$, 11
N. L. W. A. GRAVELAAR, Over den oorsprong van den naam **sinus** 12

510.5
WI
v.2

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

Goniometrische betrekkingen 116
Correspondentie 46

Planimetrie.

DR. N. QUINT, Verschillende opmerkingen . . 99
Behandeling van den regelm. *10* en *5* hoek.
De lijn van Wallace.
Het z. g. Theorema van Matthew Stewart.
J. TUMMERS, Eigenschappen van een driehoek . 233

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

Als een rechte lijn van bepaalde lengte tusschen twee elkaar snijdende lijnen glijdt, beschrijven het middelpunt van den omgeschreven cirkel en het hoogtepunt van den gevormden driehoek cirkelbogen 108
Over den ingeschreven vierhoek en den raaklijnen vierhoek 109
Men verlengt de zijden AB, BC, CA van $\Delta\ ABC$ met stukken BC_1, CA_1, AB_1, $= k.AB$, $k.BC$, $k.CA$. Als $A_2 B_2 C_2$ de middens zijn van $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, dan hebben de driehoeken ABC, $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ hetzelfde zwaartepunt . . 113
Zijn $ABCD$ een koordenvierhoek; I_1, r, enz de middelpunten en stralen der cirkels beschreven in de driehoeken BCD, enz, dan is $I_1 I_2 I_3 I_4$ een rechthoek en $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ . . 113
Door het punt O in het vlak van $\Delta\ ABC$ trekt men een rechte, die BC in P, CA in Q, AB in R snijdt. Als dan P^1, Q^1, R^1 ten opzichte van O symmetrisch gelegen zijn met P, Q, R, dan zullen AP^1 BQ^1, CR^1 door één punt gaan . 113
In een gelijkzijdigen driehoek ABC zijn M, N, O de spiegelpunten van een punt P ten opzichte van de zijden. De lijnen AM, BN, CO gaan door één punt 114
Eigenschap van een parallelogram . . . 114
In een driehoek is de som der kwadraten der afstanden van het middelpunt van den 9 puntscirkel tot de middelpunten der in- en aangeschreven cirkels gelijk aan *21* maal het kwadraat van den straal van den omgeschreven cirkel verminderd met de som der kwadraten der zijden . . 115
Eigenschap van een vierhoek 115
Het teekenen van een hoek van gegeven grootte 125
Als de vier lijnen, die een volledige vierzij insluiten, in dezelfde verhouding door de hoekpunten verdeeld worden, zijn ze in de u. en m. r. verdeeld 170

415679

Eigenschappen van een koordenvierhoek, waarvan de zijden een meetkundigen reeks vormen . 171
De formule van Heron 171
Zij O een punt binnen $\triangle ABC$. A^1, B^1, C^1 zijn de middens van AO, BO, CO; a, b, c de zwaartepunten der $\triangle\triangle OBC$, OCA, OAB. De lijnen Aa, Bb, Cc snijden elkander in een punt P, A^1a, B^1b, C^1c in een punt Q, welke punten P en Q op de lijn liggen, die O met het zwaartepunt Z van $\triangle$ A B C. verbindt Verder is $\triangle abc = \frac{1}{9} \triangle ABC$ 175
Een Chineesche stelling over een koordenveelhoek 175
Als in een driehoek een der hoeken 60^0 is, dan is het verschil der aanliggende zijden gelijk aan den afstand van het hoogtepunt H tot het middelpunt M van den omgeschreven cirkel . . . 176
Betrekkingen in den driehoek 177
Afleiding van de poollijn 177
Vraag en Antwoord 3
Correspondentie 254

Hoogere Vlakke Krommen.

Dr. JOH. A. VREESWIJK, De involutie I p op een rechte lijn en op een kegelsnede 25
C. VAN SPAENDONK, De epicycloide en de hypocycloide als omhullende van een veranderlijke cirkelkoorde 66
F. J. VAES, Indeelingen 69
H. SIERSMA JR., Drie rechten van Simson en de parabolen welke de drie zijden eens driehoeks raken 86
J. N. VISSCHERS, De vergelijkingen

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} - 1 = 0 \quad 92$$

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

De meetk. plaats van de middelpunten der kegelsneden in een gegeven vierhoek beschreven, is de lijn gaande door de middens der hoeklijnen 102
Het optreden van een geïsoleerd punt bij meetk plaatsen 111
Uitbreiding eener bekende eigenschap der ellips . 112
De vergelijking der asymptoten eener kegelsnede 112
Uitbreiding van de stelling van Wallace . . 114
Symbolische vergelijkingen 118
Correspondentie 6

Stereometrie. Beschrijvende Meetkunde.

J. N. VISSCHERS, De stellingen van PASCAL en BRIANCHON op den bol 24
F. T. A. CEDEE, Uitbreiding van het theorema van CARNOT voor den scheeven veelhoek . . 65

DR. H. DE VRIES, Over twee vraagstukken uit de beschrijvende meetkunde 145
F. J. VAES, Naschrift 155

Uit Buitenlandsche Tijdschriften

Binnen een drievlakkenhoek $O\,A\,B\,C$ is een punt S gegeven, de doorsnede, welke S tot zwaartepunt heeft, snijdt een minimum pyramide af . . 102
Uitbreiding eener eigenschap van een rechthoekig viervlak 116
In een boldriehoek kan de som der medianen meer dan de som der zijden wezen 117
In een boldriehoek zij de mediaan a naar de zijde a getrokken gelijk aan het supplement van de helft dezer zijde. Het spherisch exces van dien driehoek is dan 180^0, terwijl de straal R van zijn omgeschreven cirkel gegeven is door $cotg\ R = cotg\ \frac{1}{2}\ a\ cotg\ \frac{1}{2}\ b\ cotg\ \frac{1}{2}\ c$ . . . 117

Krommen in de ruimte. Oppervlakken.

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

Over de definitie van den vlakken inhoud van een gebogen vlak 119
Vraag en Antwoord 2

Mechanica.

C. KREDIET, Afleiding van de wet van NEWTON uit de bewegingswetten van KEPPLER . . . 22
C. KREDIET, De constructie van de centrale as van een krachtenstelsel 94
GIULIO LAZZERI, Over de samenstelling van krachten in de ruimte. 225

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

Der Begriff des Statischen Momentes . . . 126
Sur les théorèmes généraux de la mécanique et le calcul vectoriel 178

Natuurkunde.

C. KREDIET, Over het minimum van afwijking bij een prisma 168

Methodiek.

DR. N. QUINT, Een radianometer . . . 101

Uit Buitenlandsche Tijdschriften.

Les conditions que doit remplir un enseignement complet, théorique et pratique, des mathématiques dans les établissements supérieurs . . . 103
Besnoeiing der planimetrie 104
Het tijdschrift School science and mathematics . 105

Nog eens over Geometrographie 106
Schooluitgave van MÉRAY'S Nouveaux Eléments . 109
Invoering der Infinitesimal rekening , . . 109
Vraag en Antwoord 1, 7, 9.

Varia.

C. A. CIKOT, Dr. N. QUINT Dr. J. STEIN, F. J VAES, Uit Buitenlandsche tijdschriften . . . 102, 170
DR. N. QUINT, Varia over π . . . 169, 240
Vraagstukken **71—90, 91—110, 111—130** 42, 134, 246
Correspondentie . . . 46, 140, 190, 191, 252
Vraag en Antwoord . . . 42, 137, 191, 250

Boekbespreking.

J. A VREESWIJK, Involuties op rationale krommen (Dissertatie) 28
FRED. SCHUH, Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen (Dissertatie) 29
CH. MÉRAY, Nouveaux éléments de Géométrie . 32
Dr. C. BEYEL, Darstellende Géometrie . . . 38
B. BAILLAUD et H. BOURGET, Correspondance d'Hermite et de Stieltjes Tome I . . . 40
CH. HERMITE, H. POINCARÉ et E ROUCHÉ, Oeuvres de Laguerre. Tome II. 41
ERNST LINDELÖF, Le Calcul des Résidus et ses applications à la théorie des fonctions . . 41
C. G BACHET, sieur de Méziriac, Problèmes plaisants et délectables 42
B. BAILLAUD et H. BOUGET, Correspondance d'Hermite et de Stieltjes Tome II 125
C. GUICHARD, Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple orthogonaux
E. JAHNKE, Vorlesungen über die Vektorenrechnung 126
P. APPELL et J. CHAPPIUS, Leçons de mecanique elementaire 128
CORNEILLE L LANDRÉ. Stereometrische hoofdstukken ter uitbreiding van de elementaire leerboeken 180
H. WEBER und J. WELLTSTEIN, Encyklopädie der Elementar-Mathematik . . . 183, 241
PAUL APPELL, Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe des mathématiques spéciales 131
Annuaire pour l'an 1906 133
Stereoscopic Vieuws of Solid Geometry Figures . 133
Een drietal merkwaardige boeken 243
Nieuw verschenen werken . . 48, 144, 192, 255
Zinstorende drukfouten.

AANHANGSEL.

Examen-Opgaven 1905.

Examen-opgaven B en C aan de Technische Hoogeschool . . . . . , . . 1

Eind-examen H. B. S. 18
Examen Adsp. Landmeter 21
Toelatingsexamen tot de Veeartsenijschool . . 24
Vergelijkend examen voor Adsp. Ing. van het Stoomwezen 26
Examen Waterstaat 27
Examen M. O. M_1 29
Examen Wiskunde L. O. 31
Examen Wiskunde K I 33
Examen Wiskunde K.V 35

Zinstorende Drukfouten.

bl. 109	22 v. o.	staat aangeschreven		lees	ingeschreven.
bl. 157	1 v. b	»	$n x^{n-1}$	lees	$n x^{n+1}$.
bl. 158	14 v. b.	»	x^p	»	x^{p+1}.
bl. 159	7 en 8 v. b.	»	$y = 1, 2, 3$	»	$y = 2, 3, 4$.
bl. 160	6 v. b.	»	$6n$	»	$6ny$.
bl. 174	12 v. b.	»	$G \times CF$	»	$BG \times CF$.
bl. 175	3 v. b.	»	3881	»	3888.
bl. 176	1 v. o.	»	$90^0 - A$	»	$90^0 - B$.
bl. 177	3 v. b.	»	AC	»	BC.

Naamlijst van Inteekenaren (vervolg.)

Asperen, Mejuffr. van, Leerares Middelb. Sch. v. Meisjes, *Groningen.*
Beek & Co, Boekhandel, *Amsterdam.*
Beeke, K. ter, Hoofd Christ. School, *Utrecht.*
Beusch, J. F. F., *Weltevreden*
Boer, F. de, *Delft*
Bos H. F. C., 2de Luit. d. Infant., *Bergen op Zoom.*
Brouwer, E. G., Defensielijn v. d. Bosch, *Weltevreden.*
Bijsterveld, W. J. M. van, Technisch Stud., *'s Hage.*
Craats, D. van de, *Leeuwarden.*
Dam, P. N. W. van, Leeraar Rijkslandbouwschool, *Wageningen*
Drewes, A. J., Mil. 2e Luit. der Artillerie, *Utrecht.*
Duinen, P. F. van, Boekhandel, *Amsterdam.*
Duysen, O. C. van, Boekhandel, *Zwolle.*
Edauw, Firma, Boekhandel, *Gouda.*
Eek, H. van, *Delft.*
Elast, P. F. M, *Rotterdam.*
Fijnenberg, H. B., Onderwijzer, *Amersfoort.*
Garde & Co., H. J. v. d., Boekhandel, *Zalt-Bommel*
Groenewegen, J., *Werkendam*
Groenman, A W., Phil. Cand., *'s Hage.*
Haaften, M. van, *Leiden.*
Hamel, A. B van, *'s Gravenhage.*
Hamelberg, P. J., *Sneek.*
Harte, P, Boekhandel, *Bergen-op-Zoom.*
Heux, J. W. N. Le, 2e Luitenant infanterie, *Haarlem*

Hillenius, J. M , *Amsterdam.*
Hoestra, Mej. J. H., Leerares H. B. S. v. M., *Leiden.*
Hulst en Vos, Van, Boekhandel, Kampen.
Jong, de, Luitenant, *Utrecht.*
Jurling, G., Boekhandel, *Kampen.*
Kamerbeek Gzn., J., Leeraar H. B. S., *Tilburg.*
Kat, H. J. N., Oud-Officier der Artillerie, *Weltevreden.*
Kate, Mej. M. A ten, Leerares Mid. Sch. v. M., *Leeuwarden.*
Keesing, A . Phil. Nat Cand., *Amsterdam.*
Keller, A. J. 2e Luitn. Infant. Depart. v. Oorlog, *Batavia.*
Kerkkamp, A. M., Leeraar H. B. S., *Amersfoort.*
Keuning, J., Hoofd O. L. S., *Hollum,* Ameland.
Kloos Jr., A. W., Leeraar R. H. B. S. *Goes.*
Knierum, J. H., Boekhandel, *Gorinchem.*
Knisthout, J., *Oegstgeest.*
Kroon, G. J , Gepens. Kapt. der Art. O.-I. Leger, *Dordrecht.*
Kijlstra, Dr A , *Utrecht.*
Lohuizen, F. van, *Amsterdam.*
Macdonald, F. E , Boekhandel, *Nijmegen.*
Machwirth, J. G., *Utrecht.*
Marcal, L , *Hees*
Massink, W., Student, *Delft.*
Meyer W., Leeraar Zeevaartschool, *Delfzijl.*
Meyer & Schaafsma, Boekhandel, *Leeuwarden.*
Postma, D , Ass. a. d Technische Hoogeschool, *Delft.*
Prakke, H., Boekhandel, *Nijmegen.*
Proper, J. W F. C , Techn. Stu ent, *Delft.*
Oepkes, J., *West-Terschelling.*
Olivier, A., *Nijmegen.*
Onnen Jr , Dr. H. Directeur Onderl. Levensverz v. Eigen Hulp, *Weltevreden.*
Ornstein L. S., Doct. Phil., *'s Hage.*
Mooy, M., *Breda.*
Mos, H., Leeraar, *Baarn.*
Roem Jzn , P . Boekhandel, *Amsterdam.*
Roog, J. H , *Amersfoort.*
Rutgers, Dr J. C., Leeraar Gymn., *Alkmaar.*
Rijks H. B. S., *Bergen-op Zoom.*
Schaafsma, A., Boekhandel, *Dokkum.*
Schröder, A., *Utrecht.*
Snoep, P., *Halle* bij Zelhem.
Springer, M., *Amsterdam.*
Stapel, J. F., *'s Gravenhage.*
Straaten, P. van, Boekhandel, *Meppel.*
Veldhuis, H. W. J., Leeraar M. O , *Almelo.*
Ven, J. F. v. d., Boekhandel, *Baarn.*
Vos van Nederveen Cappel, G. J. de, *Hilversum.*
Warburg, W. F., *Amsterdam.*
Wertenbroek, J. A., *'sHertogenbosch.*
Wildervank, Dr. J. C., *Zaltbommel.*
Wiskundig Genootschap, *Amsterdam.*
Wolff, J., Nat. Phil. Doct., *Arnhem.*
Wouters Boekhandel, *Amsterdam.*

L. S.

Bij den aanvang van den 2en jaargang kan met voldoening worden teruggezien op het afgeloopen jaar.

Over medewerking valt niet te klagen; van zeer verschillende zijden werden meer of minder uitgebreide stukken toegezonden — meer dan verwerkt kon worden.

Waar bij den aanvang van den 1en jaargang gerekend was 12 vel druks te geven, kon zonder moeite 18 vel worden gevuld, terwijl een aantal verhandelingen moesten blijven liggen tot dezen jaargang.

Het is niet de bedoeling door deze mededeeling af te schrikken van het inzenden van verhandelingen; integendeel zal de redactie gaarne nieuwe stukken ontvangen. Kleine mededeelingen *zijn steeds zeer welkom; in den regel kunnen die spoediger een plaats vinden dan meer uitgebreide stukken.*

In den 1en jaargang was niet vermeld, dat de redactie zich niet aansprakelijk stelt voor den inhoud der stukken, daar dit als vanzelf sprekend is.

Een merkwaardig verschijnsel is in het afgeloopen jaar zeer duidelijk aan het licht gekomen, n.l. dat „men" weinig bekend is met het werk van landgenooten.

Dat de jongeren niet meer de boeken van de Gelder, Lobatto, en anderen raadplegen is te verwachten, doch ook is er meermalen onbekendheid met het bestaan van boeken, die in den laatsten tijd verschenen zijn.

Ongetwijfeld is dit grootendeels te wijten aan de weinige openbaarheid, die de uitgevers aan de bij hen verschenen werken geven; misschien zijn er nog andere oorzaken.

Het W. T. zal zooveel mogelijk medewerken om het gebrek te verhelpen; kunnen de lezers denkbeelden aan de hand doen ter verbetering?

In de samenstelling van het W. T. zal een kleine wijziging gebracht worden; de oplossingen der vraagstukken zullen n.l. afzonderlijk worden gedrukt. Telkens zullen een of meer vellen daarvan bij een aflevering worden gevoegd, met een afzonderlijke pagineering. Aan het eind van den jaargang kunnen dus de oplossingen tot een doorloopend geheel vereenigd worden.

Wat de vraagstukken aangaat, wordt niet als eisch gesteld, dat zij oorspronkelijk zijn. Ook bekende vraagstukken kunnen worden opgenomen, wanneer daarvan nieuwe oplossingen worden gegeven, of kunnen worden verwacht.

Zulke vraagstukken kunnen aanleiding geven tot het bijeenvoegen van de reeds bestaande oplossingen. Men zie bijv. vraagstuk 27.

Het komt de redactie voor, dat het W. T. begonnen is een band te vormen tusschen verschillende wiskundigen; het versterken van dien band zal steeds hoofddoel blijven.

F. J. VAES.

Uit de Theorie der Algebraïsche Vergelijkingen

DOOR

K. BES (Tilburg).

EEN WOORD VOORAF.

Het is mijn voornemen, onder den titel hierboven vermeld, eenige onderwerpen te behandelen uit de leer der algebraïsche vergelijkingen, of die daarmede in onmiddellijk verband staan. Daartoe is het noodig te beginnen met de lineaire vergelijkingen.

Ik veronderstel natuurlijk de leer der lineaire vergelijkingen bij den lezer bekend, maar ik wensch van deze bekendheid geen gebruik te maken. Evenmin wensch ik bij den lezer eene groote ervarenheid in het gebruik en de herleiding van determinanten te veronderstellen, hoewel ik natuurlijk aanneem, dat de leer der determinanten hem niet geheel onbekend is. Wel veronderstel ik bij den lezer bekendheid met de leer der permutatiën en combinatiën.

Ik stel mij op zulk een betrekkelijk laag standpunt van kennis bij den lezer, ten einde in staat te zijn de voor te dragen stof uit een enkel gezichtspunt te kunnen beschouwen. Hierdoor zal het tevens onnoodig blijken herhaaldelijk een beroep te doen op bestaande werken of te verwijzen naar artikelen in andere tijdschriften.

Voor welwillende op- of aanmerkingen houd ik mij zeer aanbevolen.

HOOFDSTUK I.

Assemblanten en Determinanten.

§ 1. Een *assemblant* wordt gevormd door $m\,n$ getallen geschreven in den vorm van een rechthoek.

De getallen, die een assemblant vormen, noemt men zijne *elementen*. Deze worden veelal voorgesteld door eenzelfde letter, voorzien van dubbele indices welke de plaats van het element in den assemblant aanwijzen. De bovenste index wijst gewoonlijk de rangorde der rij, de onderste die der kolom aan, waarin het element voorkomt. Een assemblant wordt voorgesteld door de elementen tusschen twee vertikale lijnen te plaatsen, als volgt:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2 & a_3^1 \ldots\ldots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \ldots\ldots a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \ldots\ldots a_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m \ldots\ldots a_n^m \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Een assemblant wordt *determinant* genoemd, wanneer het aantal rijen gelijk is aan dat der kolommen. Bedraagt dit aantal n, dan spreekt men van een determinant van de n^{de} orde.

§ 2. Een assemblant, die uit m rijen en n kolommen bestaat, bevat $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$ determinanten van de k^{de} orde[1]) welke uit den assemblant verkregen worden door telkens $m-k$ rijen en $n-k$ kolommen weg te laten. Hij bevat dus, als $m<n$ is, $\binom{n}{m}$ determinanten van de m^{de}orde en, als $m>n$ is, $\binom{m}{n}$ determinanten van de n^{de}orde.

De determinanten van de hoogste orde, die in een assemblant bevat zijn, worden voorgesteld door een enkele letter voorzien van $n-m$ onderste of van $m-n$ bovenste indices, welke de kolommen of de rijen aanwijzen, die uit den assemblant moeten worden weggelaten om den voor te stellen determinant te verkrijgen, bijv. als n en m drie eenheden verschillen door $A_{1,2,3}$, $A_{2,4,5}$, enz.

1) $\binom{m}{k}$ beteekent het aantal combinatiën, k aan k, uit m elementen.

Evenzoo kan men de determinanten van de k^{de} orde, die in een assemblant bevat zijn, door een enkele letter aanwijzen, voorzien van tweeërlei indices, waarvan de onderste aanwijzen welke $n-k$ kolommen en de bovenste welke $m-k$ rijen uit den assemblant moeten worden weggelaten om den voor te stellen determinant te verkrijgen.

In het geval, dat $m=n$ is, waarin de assemblant zelf een determinant is, bevat hij $\binom{n}{k}^2$ determinanten van de k^{de} orde. Hij bevat in dat geval n^2 determinanten van de $n-1^{de}$ orde.

§ 3. De determinanten van de $n-1^{de}$ orde, die in een determinant van de n^{de} orde bevat zijn, worden gewoonlijk *onderdeterminanten* of *minoren* genoemd. Zij worden uit den determinant verkregen door telkens één rij en één kolom weg te laten. Hun aantal is gelijk aan het aantal elementen van den determinant.

Stelt men den determinant door A voor, dan worden de onderdeterminanten voorgesteld door A_k^l, waarin k aanwijst welke kolom en l welke rij uit den determinant moet worden weggelaten om den voor te stellen onderdeterminant te verkrijgen. Men zegt dan, dat A_k^l de onderdeterminant is van het element a_k^l.

§ 4. Een *term* van een determinant van de n^{de} orde is een gedurig product van n elementen, zoo genomen, dat geen twee elementen tot dezelfde kolom of tot dezelfde rij behooren.

De onderste of de bovenste indices van de elementen, waaruit een term bestaat, zijn dus alle ongelijk.

De term, waarvan de elementen alle voorzien zijn van twee gelijke indices, heet *hoofdterm* of *aanvangsterm*. De elementen, die den hoofdterm vormen, staan in den determinant in een der diagonalen; deze noemt men de *hoofddiagonaal*. De elementen, die in de tweede diagonaal geplaatst zijn, vormen de *nevendiagonaal*.

Men zegt, dat twee onderste of twee bovenste indices van de elementen, die in een term voorkomen, een *inversie* vormen, wanneer de eerste index grooter is dan de tweede.

§ 5. *Verwisselt men in een term twee elementen, dan verandert het aantal inversies niet, of dit wordt met een even aantal vermeerderd of verminderd.*

Om dit aan te toonen verwissele men eerst twee op

elkaar volgende elementen, en vervolgens twee elementen, die niet op elkaar volgen.

In het eerste geval wordt zoowel bij de bovenste als bij de onderste indices het aantal inversies met één vermeerderd of verminderd. Het totale aantal inversies veranderd daardoor niet of wordt met twee vermeerderd of verminderd.

In het tweede geval kan men zoo lang twee op elkaar volgende elementen verwisselen, totdat de bedoelde elementen de verlangde plaats innemen. Het totale aantal inversies verandert daardoor niet of wordt met een even aantal vermeerderd of verminderd.

§ 6. Het aantal inversies van een term kan zijn even of oneven, nul voor even gerekend. Van beide soorten termen bevat een determinant er evenveel.

Men geeft aan een term van een determinant het teeken $+$ of $-$, naar gelang hij een even of een oneven aantal inversies bevat. Uit de voorgaande stelling volgt, dat het teeken van een term niet verandert door verwisseling der factoren.

Laat men in de termen van een determinant de onderste (of de bovenste) indices elkaar in de natuurlijke volgorde opvolgen, dan worden de verschillende termen van den determinant uit den hoofdterm verkregen door permutatie van de bovenste (of van de onderste) indices.

Het aantal termen van een determinant der n^{de} orde bedraagt dus $1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n$.

§ 7. De *waarde* van een determinant is de som der termen, genomen met de teekens $+$ of $-$, welke aan die termen toekomen.

Uit deze bepaling vloeien de volgende eigenschappen voort:

1. *Een determinant verandert niet van waarde door verwisseling der rijen met de kolommen.*

Door deze verwisseling worden de indices van ieder element verwisseld. De termen veranderen hierdoor niet of gaan twee aan twee in elkaar over. Zij behouden het teeken $+$ of $-$, dat zij volgens bovengenoemden regel hebben moeten.

2. *Een determinant verandert van teeken, wanneer men twee rijen of twee kolommen verwisselt.*

Hierdoor worden in elken term twee bovenste of twee onderste indices verwisseld. Het aantal inversies wordt

daardoor met een oneven aantal vermeerderd of verminderd. De termen gaan twee aan twee in elkaar over, maar veranderen daarbij van teeken.

3. *Een determinant heeft de waarde nul, als er twee gelijke rijen of twee gelijke kolommen in voorkomen.*

Deze eigenschap volgt onmiddellijk uit de vorige. Wijst men de waarde van den determinant aan door A, dan verkrijgt men door verwisseling van twee gelijke rijen of kolommen $A = -A$, waaruit volgt $A = 0$.

4. *Vermenigvuldigt men de elementen eener rij of kolom met eenzelfde getal, dan wordt de waarde van den determinant met dat getal vermenigvuldigd.*

Door de vermenigvuldiging van de elementen eener rij of kolom met eenzelfde getal worden namelijk alle termen van den determinant met dat getal vermenigvuldigd.

5. *Een determinant heeft de waarde nul, als alle elementen eener rij of kolom nullen zijn.*

In dit geval zijn alle termen van den determinant gelijk aan nul.

6. *Zijn alle elementen aan denzelfden kant eener diagonaal gelijk aan nul, dan bestaat de determinant uit een enkelen term.*

In dit geval is de waarde van den determinant gelijk aan het product van de elementen van de bedoelde diagonaal, genomen met het teeken + of — volgens den regel vermeld in § 6.

§ 8. Een onderdeterminant A^l_k heeft het teeken + of —, naar gelang de som der indices k en l even of oneven is. Gewoonlijk stelt A^l_k de waarde van een onderdeterminant voor met inbegrip van het teeken + of —, dat aan dien onderdeterminant toekomt.

Met inachtneming hiervan, en als men de waarde van een determinant van de n^{de} orde door A voorstelt, verkrijgt men de twee volgende formules:

$$\left.\begin{aligned} A &= a^l_1 A^l_1 + a^l_2 A^l_2 + a^l_3 A^l_3 + \ldots + a^l_n A^l_n \\ A &= a^1_k A^1_k + a^2_k A^2_k + a^3_k A^3_k + \ldots + a^n_k A^n_k \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2),$$

waarvan de juistheid bij eenig nadenken gemakkelijk is in te zien.

De vergelijkingen (2) worden als volgt in woorden uitgedrukt:

De waarde van een determinant is gelijk aan de som der

producten van de elementen eener rij of kolom met hunne onderdeterminanten, voorzien van de teekens + of —, welke aan die onderdeterminanten toekomen.

§ 9. Vervangt men in de formules (2) de elementen der rij of kolom door die eener andere rij of kolom, dan verkrijgt men de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_1^k A_1^l + a_2^k A_2^l + a_3^k A_3^l + \ldots + a_n^k A_n^l \\ 0 = a_l^1 A_k^1 + a_l^2 A_k^2 + a_l^3 A_k^3 + \ldots + a_l^n A_k^n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Zij drukken uit, dat een determinant de waarde nul heeft, als hij twee gelijke rijen of kolommen bevat, en worden als volgt in woorden uitgedrukt:

Men verkrijgt de waarde nul, als men de som neemt der producten van de elementen eener rij of kolom met de onderdeterminanten der elementen eener andere rij of kolom, voorzien van de teekens + of —, welke aan die onderdeterminanten toekomen.

§ 10. Uit de voorgaande eigenschappen vloeien weder de volgende voort:

1. *Als alle elementen op één na eener rij of kolom nullen zijn, is de waarde van dien determinant gelijk aan het product van dat eene element met zijn onderdeterminant, voorzien van het teeken + of —, dat aan dien onderdeterminant toekomt.*

2. *De som van twee determinanten, die in alle rijen (of kolommen) op één na overeenstemmen, is gelijk aan een nieuwen determinant, die dezelfde overeenstemmende rijen (of kolommen) bevat, en waarvan de elementen der overblijvende rij (of kolom) verkregen zijn door de som te nemen van de overeenkomstige elementen der overblijvende rijen (of kolommen) der twee determinanten.*

3. *Een determinant verandert niet van waarde, wanneer men de elementen eener rij (of kolom) vermeerdert of vermindert met de overeenkomstige elementen eener andere rij (of kolom), ieder met eenzelfde getal vermenigvuldigd.*

§ 11. Vereenigt men k rijen (of kolommen) van een determinant van de n^{de} orde tot een assemblant, dan vormen de overblijvende $n-k$ rijen (of kolommen) een tweeden assemblant. De twee assemblanten, waarin men op deze wijze een determinant kan verdeelen, heeten *verwante assemblanten.*

Twee verwante assemblanten bevatten eenzelfde aantal

determinanten van de hoogste orde, want het aantal combinatiën k aan k uit n elementen is gelijk aan het aantal combinatiën $n-k$ aan $n-k$ uit hetzelfde aantal elementen of $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Neemt men uit den eersten assemblant k kolommen (of rijen) naar willekeur en laat men uit den tweeden assemblant dezelfde kolommen (of rijen) weg, dan ontstaan er twee determinanten, de eerste van de k^{de} orde de tweede van de $n-k^{de}$ orde, welke *supplementaire determinanten* genoemd worden.

Men geeft aan twee supplementaire determinanten gelijke of ongelijke teekens, naar gelang men in den determinant, waaruit zij voortkomen, een even of oneven aantal rijen en kolommen moet verwisselen om de rijen en kolommen van een der twee supplementaire determinanten tot de eerste rijen en kolommen van dien determinant te maken, zonder de overige rijen en kolommen onderling van rangorde te doen veranderen,

Uit het voorgaande volgt de eigenschap:

De waarde van een determinant is gelijk aan de som der producten van supplementaire determinanten, bepaald met inachtneming van den regel voor de teekens + en —, genomen uit twee willekeurige verwante assemblanten, waarin men den determinant kan verdeelen.

§ 12. Uit de voorgaande eigenschap vloeien weder de twee volgende voort:

1. *Een determinant heeft de waarde nul, als hij zoodanig in twee verwante assemblanten kan verdeeld worden, dat de determinanten van de hoogste orde, bevat in een der assemblanten, alle gelijk aan nul zijn.*

2. *Een determinant is gelijk aan het product van twee andere determinanten, als hij zoodanig in twee verwante assemblanten kan verdeeld worden, dat een dezer assemblanten slechts één determinant van de hoogste orde bevat, wiens waarde van nul verschilt.*

Opmerking. Door toepassing van deze eigenschap kan men het product van twee determinanten uitdrukken door een determinant, waarvan het ordegetal gelijk is aan de som der ordegetallen der twee determinanten.

§ 13. De volgende stelling verschaft het middel het product van twee determinanten van dezelfde orde uit te drukken door een determinant van gelijke orde als deze:

Men verkrijgt de elementen van een determinant, voorstellende het product van twee determinanten van dezelfde orde als deze, door de elementen van iedere rij (of kolom) van den eenen determinant te vermenigvuldigen met de overeenkomstige elementen van de rijen (of kolommen) van den anderen determinant, en telkens de som dezer producten te nemen.

Toegepast op twee determinanten van de derde orde verkrijgt men de volgende formule:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 x_1^1 + a_2^1 x_2^1 + a_3^1 x_3^1 & a_1^1 x_1^2 + a_2^1 x_2^2 + a_3^1 x_3^2 & a_1^1 x_1^3 + a_2^1 x_2^3 + a_3^1 x_3^3 \\ a_1^2 x_1^1 + a_2^2 x_2^1 + a_3^2 x_3^1 & a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 & a_1^2 x_1^3 + a_2^2 x_2^3 + a_3^2 x_3^3 \\ a_1^3 x_1^1 + a_2^3 x_2^1 + a_3^3 x_3^1 & a_1^3 x_1^2 + a_2^3 x_2^2 + a_3^3 x_3^2 & a_1^3 x_1^3 + a_2^3 x_2^3 + a_3^3 x_3^3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Deze kan als volgt bewezen worden:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 x_1^1 + a_2^1 x_2^1 + a_3^1 x_3^1 & a_1^1 x_1^2 + a_2^1 x_2^2 + a_3^1 x_3^2 & a_1^1 x_1^3 + a_2^1 x_2^3 + a_3^1 x_3^3 \\ a_1^2 x_1^1 + a_2^2 x_2^1 + a_3^2 x_3^1 & a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 & a_1^2 x_1^3 + a_2^2 x_2^3 + a_3^2 x_3^3 \\ a_1^3 x_1^1 + a_2^3 x_2^1 + a_3^3 x_3^1 & a_1 x_1^2 + a_2^3 x_2^2 + a_3^3 x_3^2 & a_1^3 x_1^3 + a_2^3 x_2^3 + a_3^3 x_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 x_1^1 + a_2^1 x_2^1 + a_3^1 x_3^1 & a_1^1 x_1^2 + a_2^1 x_2^2 + a_3^1 x_3^2 & a_1^1 x_1^3 + a_2^1 x_2^3 + a_3^1 x_3^3 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 x_1^1 + a_2^2 x_2^1 + a_3^2 x_3^1 & a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 & a_1^2 x_1^3 + a_2^2 x_2^3 + a_3^2 x_3^3 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 x_1^1 + a_2^3 x_2^1 + a_3^3 x_3^1 & a_1^3 x_1^2 + a_2^3 x_2^2 + a_3^3 x_3^2 & a_1^3 x_1^3 + a_2^3 x_2^3 + a_3^3 x_3^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ -x_1^1 & -x_2^1 & -x_3^1 & 1 & 0 & 0 \\ -x_1^2 & -x_2^2 & -x_3^2 & 0 & 1 & 0 \\ -x_1^3 & -x_2^3 & -x_3^3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix} .$$

Het derde lid der voorgaande gelijkheid is uit het tweede lid verkregen door de 1e kolom te verminderen met $\alpha_1^1 \times$ de 4e, $\alpha_2^1 \times$ de 5e en $\alpha_3^1 \times$ de 6e; de 2e kolom met $\alpha_1^2 \times$ de 4e, $\alpha_2^2 \times$ de 5e en $\alpha_3^2 \times$ de 6e; de 3e kolom met $\alpha_1^3 \times$ de 4e, $\alpha_2^3 \times$ de 5e en $\alpha_3^3 \times$ de 6e kolom.

Opmerking. Dit bewijs geldt algemeen, ook wat de teekens + en — betreft, zooals gemakkelijk is na te gaan.

§ 14. Vervangt men in een determinant alle elementen door de onderdeterminanten van die elementen met inbegrip van het teeken + of —, dat aan iederen onderdeterminant toekomt, dan verkrijgt men een nieuwen determinant, die de *geadjungeerde determinant* van den eersten genoemd wordt.

§ 15. *De geadjungeerde determinant van een determinant van de n^{de} orde is gelijk aan de $n-1^{de}$ macht van den oorspronkelijken determinant.*

Om dit te bewijzen, vermenigvuldigt men den geadjungeerden determinant met den oorspronkelijken; men verkrijgt dan tot uitkomst de n^{de} macht van den oorspronkelijken determinant. Voor een determinant van de 3e orde geeft dit de volgende ontwikkeling:

$$A \times \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1A_1^1 + a_2^1A_2^1 + a_3^1A_3^1 & a_1^1A_1^2 + a_2^1A_2^2 + a_3^1A_3^2 & a_1^1A_1^3 + a_2^1A_2^3 + a_3^1A_3^3 \\ a_1^2A_1^1 + a_2^2A_2^1 + a_3^2A_3^1 & a_1^2A_1^2 + a_2^2A_2^2 + a_3^2A_3^2 & a_1^2A_1^3 + a_2^2A_2^3 + a_3^2A_3^3 \\ a_1^3A_1^1 + a_2^3A_2^1 + a_3^3A_3^1 & a_1^3A_1^2 + a_2^3A_2^2 + a_3^3A_3^2 & a_1^3A_1^3 + a_2^3A_2^3 + a_3^3A_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = A^3;$$

dus

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = A^2.$$

(Wordt vervolgd.)

Een meetkundig bewijs voor de formules:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}, \text{ en } \cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

DOOR

O. BENING (den Haag).

Zij in nevenstaand figuur bg. AB $= a$, dan is BP $=$ R sin a, OP $=$ R cos a, indien R $=$ straal des cirkels en BP $\perp$ OA. Verdeel de bogen AB en BD in twee gelijke deelen door de punten C en C′; trek de koorden AB en BD en de stralen OC en OC′.

Uit deze constructie volgt:

BI $=$ R sin bg. BC $=$ R sin $\frac{1}{2} a$, en BI′ $=$ OI $=$ R cos $\frac{1}{2} a$.

In de rechth. $\triangle\triangle$ ABP en DBP heeft men:

$$AB = 2\,BI = 2\,R \sin \tfrac{1}{2} a =$$
$$\sqrt{AP^2 + BP^2} = R \sqrt{(1-\cos a)^2 + \sin^2 a},$$
$$BD = 2\,BI' = 2\,R \cos \tfrac{1}{2} a =$$
$$\sqrt{PD^2 + BP^2} = R \sqrt{(1+\cos a)^2 + \sin^2 a};$$

waaruit na eenige herleiding volgt:

$$2\,R \sin \tfrac{1}{2} a = R \sqrt{2 - 2\cos a}; \quad 2\,R \cos \tfrac{1}{2} a = R \sqrt{2 + 2\cos a}$$

of:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \text{ en } \cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}.$$

Een iets ander bewijs komt voor in het werkje: Goniometrischen Studie. Grafische behandeling van goniometische formules en vergelijkingen; goniometrische oplossing van 2e en 3e machtsvergelijkingen door F. J. Vaes (Gorinchem, J. Noorduyn en Zoon, 1896), en wel in No. 28 bl. 9.

Over den oorsprong van den naam sinus,[1]

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR,

(Deventer)

In MONTUCLA-STRABBE, *Historie der wiskunde* II, Amsterdam 1787, vindt men op p. 31 noot (*s*) de gissing van zekeren GODIN vermeld, dat de naam sinus een samentrekking zou wezen van s.ins = semissis inscriptae = halve ingeschreven (koorde).

MONTUCLA acht dit vermoeden „'t eenemaal gelukkig en waarschijnlijk" en de heer GOUWENTAK (W. T. 1e jaarg., p. 284) helt met zijn semi-inscriptus (!) blijkbaar tot dezelfde meening over, zonder evenwel veel naar historisch bewijsmateriaal te vragen. En juist dit ontbreekt: de uitdrukking semissis inscriptae komt niet voor.

Van het begin van de 12e eeuw af vindt men in alle Latijnsche werken over wis- en sterrenkunde in navolging van PLATO VAN TIVOLI (± 1120; Barcelona), LEONARDO VAN PISA (± 1200) en JORDANUS NEMORARIUS (± 1200) een koorde met de termen c(h)orda en subtensa aangeduid; PITISCUS b.v. definiëert in zijn *Trigonometria*, Augsburg 1600, p. 34, den sinus als „semissis subtensae dupli arcus".

En vóór de 12e eeuw treft men nergens eenig spoor aan van een Latijnschen vakterm voor koorde; BOËTHIUS (± 400) b.v. bedient zich van de uitdrukking „linea recta in circulo" (BOËTIUS, *De institut. arithmetica, musica, geometria*, ed. FRIEDLEIN, Leipzig 1867, p. 379).

En FINK's *Geometria rotundi*, Bazel 1583, het eenige werk, waarin de term inscripta voorkomt (b.v.: „Proposuimus ut in circulo inscriptas, sic in semicirculo sinus perpendendos, sed et rectas sinibus connexas", p. 73) kan op het ontstaan van den naam sinus, die van minstens vier eeuwen vroeger dagteekent en door FINK reeds als van Arabischen oorsprong wordt verklaard („Sinus voca-

1) Dit stukje werd opgesteld naar aanleiding van correspondentie over het meervoud van sinus. Zie bl. 211 en 284 van den 1en jaargang, en correspondentie in deze aflevering. Red

bulum in hac significatione est arabicum et ideo barbarum", p. 641), bezwaarlijk invloed hebben uitgeoefend.

Zeer waarschijnlijk zijn wij den naam sinus verschuldigd aan GERHARD VAN CREMONA (± 1150; Toledo), wiens Latijnsche vertalingen van verscheiden astronomische werken der West-Arabieren de voornaamste bron zijn geweest, waaruit West-Europa in de middeleeuwen zijn kennis van de sterrenkunde der Arabieren heeft geput, en hebben wij dien terminus technicus te beschouwen als de woordelijke Latijnsche vertaling van het Arabische dzjaib (= plooi, boezem, enz.), waarmede in de oorspronkelijke handschriften de koorde van den dubbelen boog wordt aangeduid.

In GERHARD's vertaling van de Toledaansche tafels b.v. heet het: „Sinus cuius libet portionis circuli est dimidium cordae duplicis portionis illius" (*Bibliotheca mathematica*, 3te Folge I, Leipzig 1900, p. 343).

En, behalve in Arabische manuscripten vinden wij den naam dzjaib in den vorm geib terug in ATELHART VAN BATH's (± 1125) Latijnsche vertaling van MOHAMMED BEN MOESA's (± 820; Bagdad) astronomische tafels: „elgeib elmustewi seu planum" = sinus rectus, „elgeib elmacus seu diminutum" = sinus versus (CHASLES in: *Comptes rendus de l'académie de Paris* 1846, XXIII, p. 850).

Van de wijze, waarop een woord als dzjaib een vakterm is kunnen worden, waarmede de halve koorde van den dubbelen boog wordt aangeduid, is door den Franschen orientalist MUNCK een alleszins aannemelijke verklaring gegeven (1863), die door nieuwere onderzoekingen (1895) nog aan waarschijnlijkheid heeft gewonnen.

De Arabieren hebben hun wis- en sterrenkundige kennis uit Grieksche en Indische bronnen geput.

Het begrip sinus is van Indischen oorsprong (ÂRYABHATTA, ± 500).

Het woord jyâ, jîva diende den Indiërs tot vorming van de vaktermen ardhajyâ = sinus (rectus), kotijyâ = cosinus en utkramajyâ = sinus versus.

Ardhajyâ = halve koorde werd tot jyâ, jivâ verkort.

In dezen vorm leerden de Arabieren den term kennen en schreven dien op den klank af als dzjiba.

Maar de medeklinkers, die als dzjiba gelezen worden, kunnen, als de diacritische punten, die de klinkers bepalen,

worden weggelaten, evengoed als dzjaib worden gelezen.

Zoo kwam, naar MUNCK's verklaring, ter aanduiding van den sinus voor een vreemd woord, dat niet verstaan werd, een woord van eenigszins gelijken vorm en klank uit de eigen taal in gebruik, dat wel niet in verband stond met de zaak, die er door werd aangewezen, maar dat ten minste verstaanbaar klonk.

Evenals in onzen tijd het Eng. lemon-squash tot het Nederl. kwast verwerd, zou dus voormaals het Ind. ardha-jyâ in het Arab. dzjaib zijn overgegaan.

Dat evenwel de herinnering aan den Indischen oorsprong van dit dzjaib althans bij sommige Arabische geleerden bewaard is gebleven, schijnt te blijken uit PLATO VAN TIVOLI's Latijnsche vertaling van een werk van AL-BATTANI (± 900; Damascus) over sterrenkunde[1]), waarin de sinus chorda en de sinus versus chorda versa wordt genoemd, en door den schrijver in de inleiding wordt medegedeeld, dat overal in zijn verhandeling onder „koorde" de „halve koorde" moet worden verstaan, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel vermeld wordt. („Nos autem dimidium cordae duplicatis unius cujusque arcuum quartae circuli sumpsimus... et ne in sequentibus haec nobis iterare necesse sit, edicimus omnem tractatum nostrum sive mentionem cordarum de medietatis cordis opportere intelligi, nisi aliquo proprio nomine signaverimus, quod et cordam integram appellabimus, unde frequentius non multum indigemus." *Rudimenta astronomica Alfragani; item Albategnius astronomus peritissimus de motu stellarum... omnia cum demonstrationibus et additionibus Joannis de Regiomonte*, Neurenberg 1537, cap. III, p. 7v.)

Het vermoeden, dat AL-BATTANI de gewoonte der Indiërs, om ardhajyâ tot jyâ te verkorten, in het Arabisch heeft nagevolgd, klinkt althans waarschijnlijker dan dat PLATO VAN TIVOLI dzjaib door chorda zou hebben vertaald.

Niet onvermeld mag eindelijk blijven, dat in de drukuitgaven van PLATO VAN TIVOLI's Latijnsche bewerking van AL-BATTANI's geschrift éénmaal de naam sinus wordt aangetroffen (in denzelfden zin sinus versus naast chorda versa: „Si autem per has cordas versas arcus scire desideras, si chorda quam habueris minus 60 fuerit, eam de 60 minue, et residui arcum scito, quem de 90

1) Een Arabische-tekstuitgaaf van dit geschrift is in 1899 te Milaan verschenen.

minues, et quod remanserit, erit arcus sinus versi", t. a. p. cap. III, p. 7v.).

Vandaar, dat men niet zelden den naam sinus als van PLATO VAN TIVOLI afkomstig vindt opgegeven.

Ten onrechte zeer waarschijnlijk. PLATO's manuscript namelijk werd door REGIOMONTANUS (± 1450) van aanteekeningen voorzien en uit diens nalatenschap door MELANCHTON, den boezemvriend van LUTHER, in 1536 te Neurenberg in druk uitgegeven; een onveranderde herdruk verscheen in 1645 te Bologna.

Nu bedient zich REGIOMONTANUS in zijn aanteekeningen overal van den naam sinus; vermoedelijk is dus die naam dien éénen keer bij vergissing in den tekst geraakt.

(Naar VON BRAUNMÜHL, CANTOR, TROPFKE e. a.)

Elementaire berekening van logarithmen

DOOR

DR. N. QUINT (den Haag).

Het schijnt vrij gebruikelijk te zijn, dat den leerlingen logarithmentafels in handen gegeven worden, zonder dat hun eenig denkbeeld gegeven wordt van de wijze, waarop zulk een wonderboek vervaardigd kan worden. Sommigen weten — heel voornaam — te vertellen, dat die quaestie in de hoogere wiskunde thuis behoort en kijken heel verbaasd als men hun zegt, dat de eerste vervaardigers van logarithmentafels ook maar elementaire wiskunde hebben gebruikt. Anderen geven, misschien onbewust, een redeneering van *Neper* weer, dat n.l. $2^{1000000000}$ een getal is van 301029996 cijfers en dus $\log 2 = 0{,}301029995\ldots\ldots$ moet zijn, maar zij kijken toch vrij sceptisch als men hen vraagt of *Neper* werkelijk deze machtsverheffing uitgevoerd heeft.

Waar nu als een voordeel van het wiskundig onderwijs genoemd is dat den leerlingen bewezen wordt, wat men hen meedeelt, laat men hen hier maar berekeningen maken met behulp van een apparaat van welks vervaardiging zij geen denkbeeld hebben, en dat zij maar beschouwen moeten als iets, dat kant en klaar uit de hooge regionen der wiskunde afgedaald is. Zeker zou het streng worden

afgekeurd als bij het onderwijs ex cathedra verkondigd werd, dat π met behulp van reeksen uit de hoogere algebra kan gevonden worden. Men zou zeggen, dat kweekt napraters, geen nadenkers, en behandelt daarom de methode van *Archimedes*, hoewel deze ook al een paar eeuwen hare practische beteekenis verloren heeft.

Geheel onnoodig is die behandeling der logarithmentafels trouwens ook, daar zoowel nieuwere als oudere methodes geheel onder het bevattingsvermogen der leerlingen vallen. Van deze zal in dit opstel een overzicht gegeven worden.

I. *De methode van Neper—Briggs.*

In 1615 was de *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* verschenen; een jaar later begon de samenwerking van zijn schrijver, *Neper*, (1550—1617) met *Briggs* (1556—1630). In onderling overleg besloten zij 10 als basis van een logarithmenstelsel te nemen en vonden methodes ter berekening dezer dekadische logarithmen, beschreven in een *Appendix* tot de *Constructio*, welke in 1619 het licht zag. Een dezer methodes, men zou haar de methode der middelevenredigen kunnen noemen wordt nog wel in elementaire leerboeken, b.v. in *Ninck Blok's Algebra*, besproken. Met behulp der betrekking

$$\log \sqrt{ab} = \tfrac{1}{2} (\log a + \log b),$$

tracht men de logarithme van een getal tusschen twee grenzen in te sluiten, welke al minder en minder gaan verschillen. Om b.v. log 5 te bepalen zou men berekeningen hebben, die in de volgende tabel zijn samengevat:

a	b	$\sqrt{ab}$	$\log \sqrt{ab}$
1	10	3,162277	0,5
3,162277	10	5,623413	0,75
3,162277	5,623413	4,216964	0,625
4,216964	5,623413	4,869674	0,6875
4,869674	5,623413	5,232991	0,71875
4,869674	5,232991	5,048065	0,703125
4,869674	5,048065	4,958069	0,6953125
4,958069	5,048065	5,002865	0,6992187

waaruit men reeds besluiten kan tot $\log 5 = 0{,}69 \ldots\ldots$. Doorgaande vindt men

4,999984	5,000008	4,999997	0,6989697
4,999997	5,000008	5,000003	0,6989702
4,999997	5,000003	5,000000	0,6989700

Deze methode werd door *Briggs* gebruikt bij de berekening van de logarithmen der getallen 1 – 20000 en 90000 – 100000 tot 14 decimalen. Ook werkte volgens deze methode onze landgenoot *Adriaen Vlack* (1600 – 1667), lid der *Goudsche* uitgevers-firma *Pieter Rammaseyn*, die de leemte in de tafels van *Briggs* aanvulde.

Ook *Keppler* schijnt op geheel zelfstandige wijze tot deze methode gekomen te zijn en daarvan bij de berekening zijner tafels gebruik gemaakt te hebben.

(*Wordt vervolgd.*)

Het meetbaar maken van den noemer $\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots \sqrt[n]{a_p}$

DOOR

F. T. A. CEDEE, (Delft).

Om een noemer, die uit p n^{de} machtswortels bestaat, meetbaar te maken, zal het voldoende zijn een veelterm aan te wijzen, die meetbaar is en deelbaar door den gegeven noemer, daar wij dan nog slechts teller en noemer van de gegeven breuk met het quotient van den gevonden veelterm en den gegeven noemer zullen hebben te vermenigvuldigen. Een zoodanige veelterm nu is voor elke geheele waarde van n en p op de volgende wijze te verkrijgen.

Men vorme n tweetermen door bij $\sqrt[n]{a_1}$ achtereenvolgens op te tellen, $\sqrt[n]{a_2}$, vermenigvuldigd met de n wortels der vergelijking $x^n - 1 = 0$, welke gelijk zijn aan de eenheid met de argumenten $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{4\pi}{n} \cdot \frac{6\pi}{n} \ldots \frac{2n\pi}{n}$. We vinden dan:

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{2\pi}{n}};\ \sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{4\pi}{n}} \ldots \sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{2n\pi}{n}}.$$

Op dezelfde wijze kunnen we met elk van deze tweeter-

men n drietermen samenstellen door op tellen de n waarden, die men verkrijgt door $\sqrt[n]{a_3}$ met bovengenoemde n wortels te vermenigvuldigen. We vinden dan:

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{2\pi}{n}} + \sqrt[n]{a_3} \times 1_{\frac{2\pi}{n}} \cdots\cdots$$

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{2n\pi}{n}} + \sqrt[n]{a_3} \times 1_{\frac{2\pi}{n}},$$

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{2\pi}{n}} + \sqrt[n]{a_3} \times 1_{\frac{4\pi}{n}} \cdots\cdots$$

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{2n\pi}{n}} + \sqrt[n]{a_3} \times 1_{\frac{4\pi}{n}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a^2} \times 1_{\frac{2\pi}{n}} + \sqrt[n]{a_3} \times 1_{\frac{2n\pi}{n}} \cdots\cdots$$

$$\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} \times 1_{\frac{2n\pi}{n}} + \sqrt[n]{a_3} \times 1_{\frac{2n\pi}{n}}.$$

Op deze wijze voortgaande tot aan den laatsten term $\sqrt[n]{a_p}$ krijgen we achtereenvolgens n tweetermen, n^2 drietermen, n^3 viertermen en in het algemeen n^{p-1} p termen. Het gedurig product van deze p-termen, levert ons den gewenschten veelterm, daar deze de volgende eigenschappen heeft: a) hij is deelbaar door den gegeven noemer; b) hij is meetbaar. Ter bekorting en tot meerdere duidelijkheid zullen wij het bewijs hiervoor geven voor het geval $n = p = 3$ is. Uit den gang van het betoog zal dan genoegzaam blijken, dat beide eigenschappen ook voor andere geheele waarden van n en p doorgaan.

Voor $n = p = 3$ krijgen we de volgende 9 drietermen, waarvan we het product zullen voorstellen door N, terwijl a, b en c de termen van den noemer aanduiden:

$$\begin{array}{lll} a + b_{\frac{2\pi}{3}} + c_{\frac{2\pi}{3}} & a + b_{\frac{4\pi}{3}} + c_{\frac{2\pi}{3}} & a + b_{\frac{6\pi}{3}} + c_{\frac{2\pi}{3}} \\ a + b_{\frac{2\pi}{3}} + c_{\frac{4\pi}{3}} & a + b_{\frac{4\pi}{3}} + c_{\frac{4\pi}{3}} & a + b_{\frac{6\pi}{3}} + c_{\frac{4\pi}{3}} \\ a + b_{\frac{2\pi}{3}} + c_{\frac{6\pi}{3}} & a + b_{\frac{4\pi}{3}} + c_{\frac{6\pi}{3}} & a + b_{\frac{6\pi}{3}} + c_{\frac{6\pi}{3}} \end{array} \qquad (1)$$

Van het gedurig product dezer 9 drietermen zullen wij nu de volgende eigenschappen bewijzen:

a) N is symmetrisch ten opzichte van a, b en c.

b) N is meetbaar ten opzichte van a, b en c.

c) De coëfficienten in de ontwikkeling van N zijn meetbaar.

d) N is deelbaar door $a + b + c$.

a) Bewijs: Wanneer we b_β beschouwen als het product $b \times 1_\beta$, dan blijkt uit de samenstelling van N, dat het gedurig product niet verandert door verwisseling van b en c. Dat dit ook het geval is voor b en a zien wij, wanneer wij de drietermen der eerste, tweede en derde kolom respectievelijk vermenigvuldigen met $1_{\frac{4\pi}{3}}$, $1_{\frac{2\pi}{3}}$ en $1_{\frac{6\pi}{3}}$. Hierdoor toch is N met $(1_{\frac{4\pi}{3}})^3 . (1_{\frac{2\pi}{3}})^3 . (1_{\frac{6\pi}{3}})^3$ of 1 vermenigvuldigd en dus onveranderd gebleven, terwijl het gedurig product de factoren bevat, die het bij verwisseling van a en b zou gekregen hebben. Op soortgelijke wijze toont men dit aan voor a en c. Daar dus N bij onderlinge verwisseling van a, b en c onveranderd blijft, zoo is eigenschap a) bewezen.

b) Bewijs: Daar N symmetrisch is gebleken ten opzichte van a, b en c, zal het voor het bewijzen van eigenschap b) voldoende zijn aan te toonen, dat N meetbaar is ten opzichte van c. Hiertoe beschouwen wij de vergelijking $x^3 - 1 = 0$.

In de hoogere algebra wordt bewezen, dat

$$x^3 - 1 = (x - 1_{\frac{2\pi}{3}})(x - 1_{\frac{4\pi}{3}})(x - 1_{\frac{6\pi}{3}}) \tag{2}$$

Ontwikkelen we het gedurig product in het tweede lid, dan vinden we:

$$x^3 - x^2 \Sigma 1_{\frac{2\pi}{3}} + x \Sigma 1_{\frac{2\pi}{3}} . 1_{\frac{4\pi}{3}} - 1_{\frac{2\pi}{3}} . 1_{\frac{4\pi}{3}} . 1_{\frac{6\pi}{3}} \tag{3}$$

Daar deze vorm gelijk is aan $x^3 - 1$, zoo volgt hieruit:

$$\Sigma 1_{\frac{2\pi}{3}} = 0, \quad \Sigma 1_{\frac{2\pi}{3}} . 1_{\frac{4\pi}{3}} = 0, \quad 1_{\frac{2\pi}{3}} . 1_{\frac{4\pi}{3}} . 1_{\frac{6\pi}{3}} = 1. \tag{4}$$

Ontwikkelen we het gedurig product $(x - r_{\frac{2\pi}{3}})(x - r_{\frac{4\pi}{3}})(x - r_{\frac{6\pi}{3}})$ dan vinden we:

$$x^3 - rx^2 \Sigma 1_{\frac{2\pi}{3}} + r^2 x \Sigma 1_{\frac{2\pi}{3}} . 1_{\frac{4\pi}{3}} - r^3 1_{\frac{2\pi}{3}} . 1_{\frac{4\pi}{3}} . 1_{\frac{6\pi}{3}} . \tag{5}$$

En dus in verband met (4):

$$(x - r_{\frac{2\pi}{3}})(x - r_{\frac{4\pi}{3}})(x - r_{\frac{6\pi}{3}}) = x^3 - r^3. \tag{6}$$

Door in (6) te stellen $x = a + b_{\frac{2\pi}{3}}$ en $r = -c$ gaat het eerste lid van (6) over in het gedurig product van de 3 drietermen der eerste kolom in (1). Stellen we dit gedurig product voor door K_1 en dat der drietermen van de tweede en derde door K_2 en K_3, dan vinden wij volgens (5)

$$K_1 = (a + b_{\frac{2\pi}{3}})^3 + c^3 \qquad K_2 = (a + b_{\frac{4\pi}{3}})^3 + c^3$$

$$K_3 = (a + b_{\frac{6\pi}{3}})^3 + c^3.$$

Hieruit blijkt dat, daar $N = K_1 . K_2 . K_3$, dit gedurig product alleen 3de, 6de en 9de machten van c kan bevatten en dus meetbaar is tenopzichte van c, wat gevraagd was te bewijzen.

c) De coëfficiënten in de ontwikkeling van N zijn blijkbaar rationale functiën van $1_{\frac{2\pi}{3}}$, $1_{\frac{4\pi}{3}}$ en $1_{\frac{6\pi}{3}}$. Door onderlinge verwisseling van de argumenten in N blijft dit gedurig product dezelfde factoren behouden. Door onderlinge verwisseling der argumenten in N veranderen dus ook de coëfficiënten in de ontwikkeling van N niet, waaruit volgt, dat deze coëfficiënten symmetrische functiën van $1_{\frac{2\pi}{3}}$, $1_{\frac{4\pi}{3}}$ en $1_{\frac{6\pi}{3}}$ dus van de wortels der vergelijking $x^3 - 1 = 0$ zijn. Daar nu rationale symmetrische functiën van de wortels eener vergelijking (wat in de hoogere algebra bewezen wordt) rationaal in de coëfficienten dier vergelijking kunnen worden uitgedrukt, zoo volgt hieruit in verband met het feit, dat die coëfficiënten hier 0 en 1 zijn, dat dit ook het geval is met de coëfficiënten in de ontwikkeling van N voorkomende, dat deze dus meetbaar zijn.

d) Daar onder de factoren van N voorkomt $a + b_{\frac{6\pi}{3}} + c_{\frac{6\pi}{3}}$, zoo blijkt hier dat N deelbaar is door $a + b + c$.

In verband met de gevonden eigenschappen kunnen wij nu stellen

$$N = A \Sigma a^9 + B \Sigma a^6 b^3 + C a^3 b^3 c^3.$$

Wanneer we $b = c = 0$ stellen, vinden we $N = a^9$ waaruit volgt $A = 1$.

Voor $c = 0$ wordt $N = (a^3 + b^3)^3$ waaruit volgt $B = 3$.

Om C langs eenvoudigen weg te bepalen, merken we op, dat voor $a = b = c = 1$ onder de factoren van N voor-

komt $1_{\frac{2\pi}{3}} + 1_{\frac{4\pi}{3}} + 1_{\frac{6\pi}{3}}$, welke factor 0 is. Voor deze waarden hebben wij dus:

$N = a^9 + b^9 + c^9 + 3\,(a^6b^3 + a^6c^3 + b^6a^3 + b^6c^3 + c^6a^3 + c^6b^3)$
$+ C\,a^3b^3c^3 = 0$ of $N = 3 + 3 \times 6 + C = 0$, waaruit volgt $C = -21$. Wij hebben dus:

$$N = \Sigma\, a^9 + 3\,\Sigma\, a^6\, b^3 - 21\, a^3\, b^3\, c^3$$

Om het quotient $N : (a + b + c)$ te bepalen kunnen we N volgens de afdalende machten van a rangschikken en dan de rekenwijze van Horner volgen, voor $a + b + c$ nemende $a - (-b - c)$.

We vinden dan.

$$a^8 - (b + c)\, a^7 + (b^2 + 2\, bc + c^2)\, a^6 +$$
$$(2\, b^3 - 3\, b^2\, c - 3\, bc^2 + 2\, c^3)\, a^5$$
$$-(2\, b^4 - b^3\, c - 6\, b^2\, c^2 - bc^3 + 2\, c^4)\, a^4 +$$
$$(2\, b^5 + b^4\, c - 7\, b^3\, c^2 - 7\, b^2\, c^3 + bc^4 + 2\, c^5)\, a^3$$
$$+ (b^6 - 3\, b^5\, c + 6\, b^4\, c^2 - 7\, b^3\, c^3 + 6\, b^2\, c^4 - 3\, bc^5 + c^6)\, a^2$$
$$-(b^7 - 2\, b^6\, c + 3\, b^5\, c^2 - b^4\, c^3 - b^3\, c^4 + 3\, b^2\, c^5 - 2\, bc^6 + c^7)\, a.$$
$$+ b^8 - b^7\, c + b^6\, c^2 + 2\, b^5\, c^3 - 2\, b^4\, c^4 + 2b^3\, c^5 + b^2\, c^6 - bc^7 + c^8$$

Hiervoor kunnen wij schrijven:

$$\Sigma\, a^8 - \Sigma\, a^7\, b + \Sigma\, a^6\, b^2 + 2\,\Sigma\, a^5\, b^3 - 2\,\Sigma\, a^4\, b^4 + 2\,\Sigma\, a^6\, bc$$
$$- 3\,\Sigma\, a^5\, b^2\, c + \Sigma\, a^4\, b^3\, c + 6\,\Sigma\, a^4\, b^2\, c^2 - 7\,\Sigma\, a^3\, b^3\, c^2$$

Uit het bovenstaande zal den lezer duidelijk geworden zijn, dat voor elke geheele waarde van n en p de noemer $\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots \sqrt[n]{a_p}$ rationaal gemaakt kan worden. Wijl nu elke wortelvorm gelijknamig kan worden gemaakt, zoo is hier bewezen, dat — *elke breuk, waarvan de noemer een wortelvorm is, tot eene met meetbaren noemer kan herleid worden* —. Zij b.v. de gegeven breuk

$\dfrac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[6]{c}}$ dan kunnen we daarvoor schrijven

$\dfrac{A}{\sqrt[30]{a^{10}} + \sqrt[30]{b^6} + \sqrt[30]{c^5}}$ waardoor het vraagstuk is teruggebracht tot dat, waarvoor in dit opstel een algemeene oplossing werd gegeven.

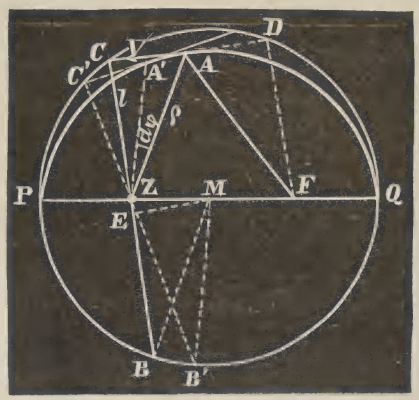
Ten slotte nog deze opmerkingen. Voor $p = 2$ en n willekeurig vinden we, op onze wijze te werk gaande, de bekende herleidingen terug, terwijl voor $n = 2$ en p willekeurig ons bewijs overgaat in dat, hetwelk door Derksen en de Laive in hun leerboek der algebra (deel IV) gegeven is.

Afleiding van de wet van Newton uit de bewegingswetten van Keppler

DOOR

C. KREDIET (Rotterdam).

In onze figuur stelt Z de zon voor. QAA'P is een ellips beschreven door de planeet A. De snelheid der planeet in A zij v. Is nu boog AA' oneindig klein, dan is zijne lengte vdt en bijgevolg is de oppervlakte van perk AZA' gelijk aan $\frac{1}{2}\, vldt$, waarbij l gelijk aan de loodlijn ZC op AV neergelaten. De oppervlakte van AZA' is ook $\frac{1}{2}\,\rho^2 d\Phi$ als ρ de voerstraal en $d\Phi = \angle$ AZA'.



Volgens de eerste wet van Keppler is de oppervlakte van AZA' constant als dt een constante is. Is nu T de omloopstijd der planeet, zoo is

$$\int_0^T \tfrac{1}{2}\, vl\, dt = \pi\, ab,^{1)}$$

als a en b de assen der ellips zijn. Hieruit volgt.

$$vl = \frac{2\,\pi\, ab}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Beschrijven wij op de groote as PQ als middellijn den omgeschreven cirkel der ellips, zoo gaat deze door de punten C en D, welke de voetpunten zijn van de loodlijnen uit de brandpunten Z en F neergelaten op de raaklijn in A.

Daar de raaklijn met de voerstralen gelijke hoeken maakt is CD $= 2a \cos$ ZAC. Is nu CZ verlengd tot zij den omgeschreven cirkel opnieuw in B snijdt en is ME $\perp$ CB, zoo is ME $= \frac{1}{2}$ CD $= a \cos$ ZAC. Hieruit volgt onmiddellijk $\angle$ EMB $= \angle$ CAZ dus ZA // BM.

[1]) Het teeken S op te vatten als integraalteeken.

In onze figuur is $CZ \times ZB = PZ \times ZQ = (a - MZ)(a + MZ) = b^2$. Vergelijken wij dit met (1) zoo vinden wij

$$\frac{BZ}{v} = \frac{b\,T}{2\,\pi\,a} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (2).$$

dus is de verhouding tusschen BZ en v, die onderling loodrecht staan, standvastig.

Gaat nu de planeet den boog AA′ beschrijven zoo verandert BZ in B′Z en bijgevolg is $\angle$ BMB′ $=$ $\angle$ AZA′ $= d\Phi$ BB′ $= a d\Phi$. BB′ is evenwel oneindig klein en dus een stukje van de raaklijn in B. Is nu p de *totale versnelling* in A, zoo is in verband met het voorgaande BB′ $= k\,p\,dt$, terwijl de richting van p loodrecht is op BB′, dus evenwijdig aan MB. Hieruit volgt: *de totale versnelling is gericht volgens de lijn AZ.*

In de figuur lezen wij nu:

$$a\,d\Phi = k\,p\,dt.$$

Aangezien $\frac{1}{2}\,\rho^2\,d\Phi = \frac{1}{2}\,v\,l\,dt$, zoo is dus

$$\frac{a}{\rho^2} = \frac{k\,p}{v\,l}$$

of in verband met (1) en (2)

$$\frac{a}{\rho^2} = p.\ \frac{b\,T \times T}{2\,\pi\,a \times 2\,\pi\,a\,b}$$

dus

$$p\,\rho^2 = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Volgens de derde wet van Keppler is dit laatste lid constant. Dus is.

$$p = \frac{C}{\rho^2}$$

en dus de kracht $K = mp$, die op de planeet met massa m werkt

$$K = C\,\frac{m}{\rho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Dat $C = f\,M$, waarbij M. de massa der zon en f de aantrekkings constante is een hypothese.

Aangezien deze afleiding anders is dan die, welke ik gaf in mijn Cosmographie, meende ik goed te doen haar hier een plaatsje te geven.

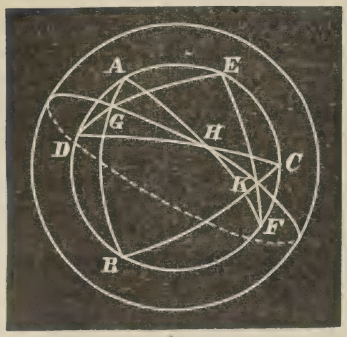
De stellingen van Pascal en Brianchon op den bol

DOOR

J. N. VISSCHERS
('s-Hertogenbosch).

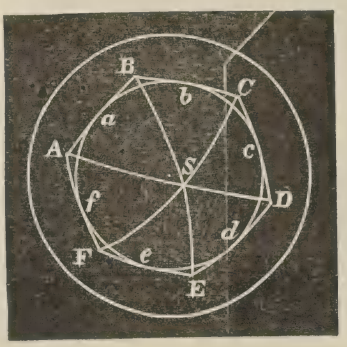
I.

Zij ABCDEF een bolzeshoek beschreven in een cirkel, dan liggen de snijpunten der overstaande zijden AB en DE, BC en EF, CD en AF op een grooten cirkel. De koorden AB, BC, CD, DE, EF en FA vormen een ingeschreven vlakken zeshoek derhalve liggen de snijpunten der koorden AB en DE, BC en EF, CD en FA in een rechte in 't vlak van de omschreven cirkel. Door die rechte en 't middelpunt van den bol kan men een plat vlak brengen, dat op den bol een grooten cirkel GHK bepaalt, waarop genoemde snijpunten moeten liggen: bijvoorb. 't punt G. 't Punt G ligt op boog AB, dus in 't vlak, gaande door koorde AB en 't middelpunt vau den bol. 't Punt G. ligt op boog DE, dus in 't vlak, gaande door DE en 't middelpunt van den bol. 't Punt G ligt derhalve op de snijlijn dezer vlakken en is 't uiteinde van den straal, getrokken naar 't snijpunt der koorden AB en DE, enz.



II.

Zij ABCDEF een bolzeshoek, beschreven om een kleinen cirkel, dan gaan de diagonalen van dien zeshoek AD, BE en CF door een punt S. De raaklijnen in de punten *a*, *b*, *c*, *d*, *e* en *f* aan den ingeschreven cirkel vormen een vlakken omschreven zeshoek $A_1B_1C_1D_1E_1E_1$ welks diagonalen A_1D_1, B_1E_1 en C_1F_1 elkaar in een punt S_1 in 't vlak van den cirkel snijden.



Zij nu M 't middelpunt van den bol, dan ligt 't punt A_1, waarin de raaklijnen in a en f elkaar snijden, zoowel in 't vlak ABM, als in 't vlak AFM. 't Ligt dus in de snijlijn dier vlakken, d.i. 't verlengde van den straal MA. Evenzoo ligt D_1 in 't verlengde van den straal MD. Boog AD ligt alzoo met koorde A_1D_1 in één vlak. Evenzoo ligt boog CF met koorde C_1F_1 in één vlak. 't Snijpunt S der bogen AE en CF ligt derhalve op denzelfden straal als 't snijpunt S_1 van A_1D_1 en C_1F_1. 't Snijpunt der bogen AD en BE ligt op denzelfden straal als dat van A_1D_1 en B_1E_1 dat is op MS_1 en valt samen met dat van AD op CF in een punt S.

De involutie I_p op een rechte lijn en op een kegelsnede[1]

DOOR

DR. JOH. A. VREESWIJK
(Utrecht).

Zij l een rechte en N een willekeurig maar vast punt op die rechte, dan kunnen wij de plaats van ieder punt P op l aangeven door zijn afstand x tot aan dat vaste punt N. Wij kiezen het punt N als nulpunt van telling voor de afstanden of abscissen x van alle punten P der lijn l tot aan dat nulpunt.

De wortels der vergelijking

$$a_x^p \equiv a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \ldots\ldots + a_{p-1} x + a_p = 0$$

zullen nu een groep van p punten op de lijn l aanwijzen; evenzoo zullen de wortels der vergelijking

$$b_x^p \equiv b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + b_2 x^{p-2} + \ldots\ldots + b_{p-1} x + b_p = 0$$

een tweede groep van p punten bepalen.

Met deze twee p-puntige groepen kunnen wij een stelsel van oneindig veel groepen van p punten verkrijgen. Beschouwen wij nl. de vergelijking

$$a_x^p + \lambda\, b_x^p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin a_x^p en b_x^p de genoemde functies van den p^{en} graad

[1]) In beknopte vorm geeft dit opstel de richting aan van de in deze aflevering vermelde dissertatie.

in de veranderlijke x zijn, en waarin λ een parameter is. Zoodra we aan λ een bepaalde waarde toekennen levert de vergelijking (1) voor de veranderlijke x blijkbaar p waarden. Door elke waarde die men aan den parameter λ geeft is derhalve een groep van p punten bepaald. Maar het is ook duidelijk dat elke groep van p punten door één harer punten, onverschillig welk, volkomen bepaald is. Immers zij een punt P_1 door de abscis x_1 aangewezen, dan wordt door substitutie dezer abscis in vergelijking (1) de parameter λ gevonden, en zijn de p wortels van (1) of de p punten der groep waartoe P_1 behoort bekend.

Wij zien uit het behandelde dat de vergelijking

$$a_x^p + \lambda\, b_x^p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

voorstelt een stelsel van oneindig vele p puntige groepen $P_1 \ldots\ldots P_p$, waarin elke groep $P_1 \ldots\ldots P_p$, door één harer punten, onverschillig welk, volkomen bepaald is. Een dergelijk puntenstelsel noemt men eene *involutie van den p^{en} graad.*

De rechte l heet de draagster der involutie. Men stelt de involutie van den p^{en} graad voor door het symbool I_p. De punten $P_1 \ldots\ldots P_p$ eener zelfde groep worden *toegevoegde* punten genoemd.

Uit den vorm der vergelijking (1) volgt dat de I_p door *twee* volledige groepen volkomen bepaald is, want dan zijn de functies a_x^p en b_x^p bekend en hiermede kan de vergelijking der I_p opgebouwd worden.

Het is mogelijk dat twee punten uit één groep samenvallen, wij hebben dan een *dubbelpunt* der I_p. Om het aantal dubbelpunten der I_p te bepalen, moeten wij onderzoeken hoeveel gelijke wortels of de vergelijking (1) bezit. Voor twee gelijke wortels is de afgeleide naar x van vergelijking (1) nul. We hebben dus x te elimineeren uit vergelijking (1) en hare afgeleide. Gemakkelijk blijkt dat wij dan eene vergelijking krijgen die in x van den graad $2(p-1)$ is, m. a. w. „Elke involutie van p^{en} graad op eene rechte bezit $2(p-1)$ dubbelpunten."

2. Nemen we in het vlak van l een willekeurige kegelsnede C_2, dan laat zich de involutie I_p zeer gemakkelijk op die kegelsnede overbrengen. We projecteeren daartoe de involutie uit een willekeurig punt van C_2, waardoor de projecteerende stralenbundel op C_2 eene puntenreeks zal insnijden, die weder eene I_p zal zijn.

We beschouwen verder de I_p op de kegelsnede. De eigenschap dat de I_p ..... $2(p-1)$ dubbelpunten moet bezitten gaat natuurlijk door. Maar er doet zich een andere belangrijke vraag voor. Wij kunnen nl. de p toegevoegde punten van elke groep twee aan twee door rechte lijnen verbinden en vragen: wat is de *omhullende* T van al deze verbindingslijnen? Deze kromme T, genaamd de *involutiekromme*, is voor de kennis der involuties zeer gewichtig. Wij zullen haar eenigszins uitvoerig behandelen.

De *klasse* k van T laat zich gemakkelijk bepalen. Immers door een willekeurig punt P_1 van de kegelsnede gaan $(p-1)$ lijnen die P_1 met de $(p-1)$ toegevoegde punten $P_2 \ldots\ldots P_p$ verbinden. Het zijn alle *raaklijnen* aan de involutiekromme T. Derhalve geldt voor de *klasse* der omhullende

$$k = p - 1$$

Onder een *vertakkingspunt* verstaat men een punt waarvoor twee toegevoegde punten samenvallen.

Komt in een groep van p toegevoegde punten het dubbelpunt $P_1 \equiv P_2$ voor, dan zijn de punten $P_3 \ldots\ldots P_p$ alle vertakkingspunten, want aan elk dezer punten is het dubbelpunt $P_1 \equiv P_2$ toegevoegd. Elke groep met een dubbelpunt bezit derhalve $(p-2)$ vertakkingspunten. De I_p bezit in het geheel $2(p-1)$ dubbelpunten, waaruit volgt dat elke I_p in het bezit is van $2(p-1)(p-2)$ vertakkingspunten. Dit geldt zoowel voor de involutie op een rechte als voor de involutie op een kegelsnede. In het laatste geval kunnen de vertakkingspunten ons dienen om het aantal snijpunten van C_2 met T te bepalen. Is nl. P_3 een vertakkingspunt dan gaan uit P_3 naar het bijbehoorende dubbelpunt $P_1 \equiv P$, de raaklijnen P_1P_3 en P_2P_3, die blijkbaar *samengevallen* zijn. Wij zien hieruit dat het punt P_3 dan op de involutiekromme T is gelegen en dat bijgevolg elk vertakkingspunt een *snijpunt* van C_2 met T oplevert. Het totale aantal dier snijpunten is dus

$$2(p-1)(p-2)$$

Deelen wij dit aantal door den graad der kegelsnede, dan vinden wij voor den *graad* n der involutiekromme

$$n = (p-1)(p-2)$$

Om de overige kenmerkende getallen van T te krijgen merken wij op dat geen *dubbelraaklijnen* mogelijk daarvoor

zouden in één groep minstens twee dubbelpunten moeten voorkomen en dat is in het algemeen niet het geval.

Buigpunten kan T ook niet hebben, want de I_p zal in het algemeen geen drievoudige punten bezitten. Voor het *geslacht* g der involutiekromme T vinden wij volgens de bekende formule van Plücker

$$g = \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2) - \tau - \beta,$$

waarin

$$\begin{cases} \tau = \text{aantal dubbelraaklijnen} = 0 \\ \beta = \text{aantal buigpunten} = 0 \\ k = \text{klasse} = p - 1 \end{cases}$$

$$g = \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3).$$

Weten wij dat $\tau = 0$, dan volgt uit een der formules van *Plücker*, nl. uit

$$n = k(k-1) - 2\tau - 3\beta,$$

wanneer wij die toepassen op de involutiekromme en dus stellen

$$\begin{cases} n = (p-1)(p-2) \\ k = p - 1 \\ \tau = 0, \end{cases}$$

dat $\beta = 0$. Zoo blijkt dus ook dat T geen buigpunten bezit.

De involutiekromme T en de kegelsnede C_2 hebben $2(p-1)$ gemeenschappelijke raaklijnen, want zij zijn achtereenvolgens van de $(p-1)^e$ en de 2^e klasse.

Hun ontstaan wordt eenvoudig verklaard door op te merken, dat de raaklijnen in de $2(p-1)$ dubbelpunten der I_p aan de kegelsnede getrokken, ook raaklijnen aan T zijn.

Boekbespreking.

De redactie heeft het genoegen het verschijnen van twee proefschriften ter verkrijging van den graad van Doctor in de Wis- en Natuurkunde te kunnen vermelden nl. van de heeren:

J. A. VREESWIJK Jr., (Utrecht) getiteld: Involuties op rationale krommen, (verdedigd 9 Mei 1905).

De richting van dit proefschrift wordt aangegeven door het in deze aflevering voorkomende stukje van denzelfden schrijver.

Voor hen, die belangstellen in het onderwerp, stelt de

schrijver gaarne een ex. van de dissertatie beschikbaar.

FRED. SCHUH, (Sneek) getiteld: Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen, (verdedigd 17 Mei 1905).

Dit proefschrift is voortgevloeid uit een nog niet volledig gepubliceerde studie van den Schr. over de hoogere singulariteiten van vlakke algebraïsche krommen, voornamelijk wat den invloed aangaat, die ze op de Plücker'sche vergelijkingen (dus b.v. op de klasse en het aantal buigpunten) uitoefenen. Bij hieraan vastgeknoopte realiteitsbeschouwingen werd een zeer eenvoudige vergelijking verkregen, die een uitbreiding is van de realiteitsvergelijking van Klein (Math. Ann., Bd. 10, p. 199).

Bedoelde vergelijking is door den Schr. gepubliceerd in de Verslagen der Kon. Akad. van Wetensch. (23 April 1904), waar voor het volledige bewijs verwezen werd naar het proefschrift, waarvan als titel werd opgegeven: „Over den invloed van hoogere singulariteiten op aanrakingsproblemen van vlakke algebraïsche krommen." Deze titel is veranderd in bovenvermelden tengevolge van uitgebreider onderzoek, waardoor de geheel zelfstandige beschouwingen van den Schr. op den achtergrond gedrongen en voor een latere publicatie bewaard werden.

De oorspronkelijke bedoeling van den Schr. was het volgende aanrakingsprobleem te behandelen, waarvan zoowel de vraag naar de klasse als die naar het aantal buigpunten van een kromme lijn een bijzonder geval is: „Hoeveel krommen van den m^{den} graad door $\frac{1}{2}\, m\,(m+3) - a$ gegeven punten vertoonen aan een gegeven kromme van den n^{den} graad met hoogere singulariteiten een aanraking van de a^{de} orde?" Hierin ligt o.a. de vraag opgesloten naar het aantal normalen uit een punt op de gegeven kromme neer te laten (rakende concentrische cirkels), naar het aantal harer toppen (cirkels, die een aanraking van de 3de orde vertoonen), dat harer sextactische punten (kegelsneden met een aanraking van de 5de orde), enz. Met de vraag naar het aantal normalen is dan ook die naar de singulariteiten der ontwondene opgelost. Op al deze vragen geeft het op p. 186 en 187 van het proefschrift zonder bewijs vermelde theorema, dat de kern van de zelfstandige onderzoekingen van den Schr. is, het antwoord.

Door de Jonquières is (in Bd. 66 van Crelle's Journal, pag. 289) een algemeener aanrakingsprobleem behandeld, doordat

niet één enkele maar meerdere aanrakingen van hoogere orde in niet-gegeven punten zijn voorgeschreven, waarvan de vraag naar het aantal dubbelraaklijnen het eenvoudigste voorbeeld oplevert. De Jonquières beperkt zich daarbij tot een gegeven kromme met slechts gewone dubbelpunten. Door Cayley (Phil. Trans, Vol 158, p. 75) is de formule van de Jonquières tot een gegeven kromme met keerpunten uitgebreid. Deze onderzoekingen zijn dus wat het aantal aanrakingen aangaat algemeener, wat de bijzonderheden, die de gegeven kromme vertoonen mag, beperkter dan de bovenvermelde.

In sommige gevallen zijn echter de formules van de Jonquières en Cayley niet toereikend, b.v. bij de vraag naar de eigenlijke kegelsneden, die een gegeven kromme 5 maal aanraken; dit komt doordat iedere in twee samenvallende rechten gedegenereerde kegelsnede oneigenlijk aan de vraag voldoet. Dergelijke problemen kunnen met behulp van de Chasles'sche karakteristiekentheorie en de daaraan aansluitende methoden (b.v. de Cayley'sche methode der functionaalvergelijkingen) behandeld worden.

Van al deze methoden geeft het proefschrift een overzicht. De Schr. heeft daarbij de onderzoekingen van de Jonquières en Cayley een aanzienlijke uitbreiding doen ondergaan, waarvan de grondgedachte neerkomt op het onderwerpen der problemen aan birationale (Cremona'sche) transformaties. Evenals in de projectieve meetkunde die eigenschappen op den voorgrond treden, die bij lineaire transformatie behouden blijven, zoo zijn bij deze onderzoekingen de eigenschappen van bijzonder belang, die tegen iedere birationale transformatie bestand zijn.

De in het proefschrift behandelde vragen komen alle op het volgende neer: *Het aantal van ∞ parameters afhangende krommen te bepalen, die aan ∞ gegevens voldoen.* Hierbij wordt een voorwaarde, die tot i vergelijkingen tusschen de parameters aanleiding geeft, voor i gegevens gerekend. Meestal zijn deze voorwaarden aanrakingsvoorwaarden met één of meer gegeven krommen, hoewel ook die onderzoekingen besproken worden, waarbij voorwaarden optreden, die betrekking hebben op het aanwezig zijn van singulariteiten of op hare ligging, b.v. de voorwaarde dat de kromme een keerpunt heeft, waarvan de keerraaklijn door een gegeven punt gaat (onderzoekingen van Maillard, Zeuthen, Schubert en Krey). Verder worden ook meestal de krommen, waarvan

het aantal gevraagd wordt, algebraïsch ondersteld; tevens worden echter ook uitbreidingen tot transcendente krommen besproken (Fouret en Halphen), terwijl hier en daar ook analoge stellingen vermeld worden, die op vlakke krommen in de ruimte, ruimtekrommen of oppervlakken betrekking hebben. Bovendien wordt nu en dan de plaats aangewezen, die de gebezigde methoden te midden der overige aftellingsmethoden innemen, waarbij ook de correspondentiebeginsels van Chasles en van Cayley en Brill ter sprake worden gebracht.

De ter beschikking staande methoden zijn in hoofdzaak: de quasi-geometrische methode (Cayley), de karakteristiekentheorie (Chasles) met de daaraan aansluitende voorwaardensymboliek (Schubert), de methode der functionaalvergelijkingen (Cayley), de methode der krommen, die door hare snijpunten met de gegeven kromme de oplossingen aanwijzen (Halphen), en last not least de correspondentiebeginsels.

De quasi-geometrische methode komt hier op neer, dat de van ω parameters afhangende krommen worden voorgesteld door punten in een meerdimensionale ruimte; een aan die krommen opgelegde voorwaarde wordt dan door een meetkundige plaats in die meerdimensionale ruimte voorgesteld, zoodat alles op een studie dier meetkundige plaatsen neerkomt.

De karakteristiekentheorie stelt zich ten doel iedere voorwaarde in een eindig aantal karakteristieke voorwaarden uit te drukken; de grondslag hiervan wordt gevormd door de beroemde stelling van Chasles, dat het aantal kegelsneden in een plat vlak van een (μ, ν) systeem (een enkelvoudig oneindig systeem van kegelsneden, waarvan er μ door een gegeven punt gaan en ν een gegeven rechte aanraken), die aan een enkelvoudige voorwaarde voldoen, door $\alpha\,\mu + \beta\,\nu$ wordt voorgesteld, waarin α en β slechts van de voorwaarde maar niet van het systeem afhangen. Door Halphen is later ontdekt, dat deze stelling slechts onder zeker voorbehoud geldt, en het karakteristiekenprobleem dus slechts voor zeer eenvoudige figuren als punten en rechte lijnen geheel algemeen oplosbaar is.

Met behulp der karakteristiekentheorie kan echter niet gevonden worden het aantal kegelsneden in een plat vlak, die aan een onsplitsbare met 5 gegevens gelijk staande voorwaarde voldoen. Dergelijke aantallen zijn het eerst door

Cayley door middel van functionaalvergelijkingen gevonden. Ook worden de methoden van Zeuthen, Schubert en Krey besproken ter bepaling van aantallen krommen van hoogeren graad, waarvoor het karakteristiekenprobleem zelfs niet onder zeker voorbehoud is opgelost.

Door het laatste gedeelte van het proefschrift, dat over de formules van de Jonquières en Cayley handelt, zijn een groot aantal zelfstandige onderzoekingen heengevlochten (deze formules geven het aantal krommen van den m^{den} graad door $\frac{1}{2} m (m + 3) - (a + b + c + \ldots)$ gegeven punten aan, die aan een gegeven kromme in niet-gegeven punten aanrakingen van de orden a, b, c enz. vertoonen). Behalve dat de afleidingen (die op een toepassing der correspondentiebeginsels berusten) hier en daar vereenvoudigd zijn, zijn zoowel de formules zelve als hare draagwijdte uitgebreid. De sleutel van deze onderzoekingen is de onderscheiding in wezenlijke en onwezenlijke oplossingen, waarvan de eerste daardoor gekenmerkt zijn, dat ze bestand zijn tegen Cremona'sche transformaties. Daardoor komt het rationaal-invariante karakter der formule van de Jonquières aan het licht, welke formule onder alle omstandigheden het aantal wezenlijke oplossingen (mits dit eindig zij) blijkt voor te stellen.

Door Cayley is de formule van de Jonquières uitgebreid tot een gegeven kromme met keerpunten (de Jonquières laat slechts gewone dubbelpunten toe), waarbij hij echter in tegenstelling met de Jonquières aanneemt, dat geen der gegeven punten op de gegeven kromme ligt. Deze beperking laat de Schr. varen en beschouwt daarbij ook de gevallen, waarbij er enkel- of meervoudige gegeven punten in keerpunten der gegeven kromme vallen. Ook worden die hoogere singulariteiten in de beschouwing opgenomen, die met een keerpunt waarin al of niet een gegeven punt valt, blijken gelijk te staan. Een uitbreiding tot een gegeven kromme met willekeurige hoogere singulariteiten is gegeven voor het geval van één enkele voorgeschreven aanraking van hoogere orde; deze uitbreiding ligt opgesloten in het op p. 186 en 187 van het proefschrift vermelde theorema, dat daar zonder bewijs is medegedeeld.

Nouveaux éléments de Géométrie par Ch. Méray, Professeur à l'Université de Dyon. Nouvelle edition refondue et augmentée. Dyon, P. Jobard, 1903. (7 frcs.)

In meer dan één opzicht is bovenvermeld boek merkwaardig. Voor ons, Nederlanders, is 't al een vreemd feit dat een hoogleeraar een boek over de beginselen der Wiskunde schrijft; in 't buitenland is 't echter een zeer gewoon verschijnsel, dat hoogleeraren zich inlaten met het onderwijs in de elementen, 't zij door boeken of artikelen te schrijven, 't zij door voordrachten te houden, of werkdadig deel te nemen aan de verrichtingen van vereenigingen. Wil men namen, dan noemen wij Poincaré, Borel, Appell, Jules Tannery, Klein, Weber, Wellstein, Gino Loria, Forsyth, Perry en D. E. Smith.

De grootste merkwaardigheid van het boek is dat daarin Planimetrie en Stereometrie gelijktijdig behandeld worden. Méray zelf in de „Enseignement mathématique" en zijn aanhangers daarin, of in andere tijdschriften, hebben herhaaldelijk de bezwaren tegen een afzonderlijke behandeling uiteengezet. Enkele daarvan schijnen ons gezocht, b.v. dit: „Hoe kan men, bij een afzonderlijke behandeling, er aan denken twee tegengesteld-congruente figuren tot bedekking te brengen, daar men eene van de twee figuren eerst uit haar vlak nemen moet?" Vooral Méray, die voor sommige gevallen bij het gebruik van zijn boek een ingrijpend anticipeeren aanraadt, moest zoo'n argument niet gebruiken. (Even weinig gegrond komt ons het bezwaar voor, dat de volgende definitie van evenwijdige lijnen cene negatieve definitie is: „lijnen in één vlak die elkaar niet snijden"; men kan volmaakt hetzelfde met eene positieve definitie zeggen: „lijnen in één vlak, zóó dat ieder punt van de eene buiten de andere ligt"). Het eindoordeel over de al of niet wenschelijkheid der fusie moet natuurlijk de ondervinding uitspreken; à priori oordeelende zouden wij zeggen, de deductieve gang der Meetkunde is voor leerlingen van 12—15 jaar al moeilijk; waarom deze moeilijkheid compliceeren met die welke ontstaat door het moeten zien in de ruimte? Eerlijkheidshalve moeten wij hierbij voegen, dat de bekende Wiskunde-pedagoog Holzmüller zegt: „Die Schwierigkeiten der räumlichen Vorstellung werden in der Regel überschatzt", waar echter weer tegenover staat het gezegde van Lemoine, over *Wiskundigen van beroep*, „bien peu d'entre eux voient dans l'espace."

Ongeveer parallel met dit bezwaar loopt ons tweede: Gewoonlijk wordt beweerd dat een wetenschap in den geest van iederen beoefenaar ongeveer dezelfde phasen doorloopt, als bij haren gang door de eeuwen; nu heeft

zich de Planimetrie veel vroeger ontwikkeld dan de Stereometrie; zelfs in de uitgaven van Euclides die vóór 10 jaar nog in Engeland algemeen gebruikt werden, komen luttel stereometrische eigenschappen voor; gaat men de opgaven en artikelen na over de elementaire meetknnde in de tijdschriften, dan vindt men tien maal zooveel over Planimetrie als over Stereometrie (de onbeduidende vraagstukken over het wentelen van driehoeken en cirkelsegmenten desnoods ingesloten). En toch leent zich de Stereometrie tot veel meer combinaties; neem b.v. de cirkels die raken aan de zijden van een driehoek of aan de verlengden, dan kan men hoogstens twee soorten onderscheiden: ingeschreven en aangeschreven; vergelijk daarmee het stereometrisch analogon: rakende bollen bij een tetraëder, waar men de volgende bollen *kan* hebben: een die aan de zijvlakken raakt, verder die, welke òf aan één zijvlak en aan de verlengden van de andere, òf aan de verlengden van al de zijvlakken raakt; verder die, welke aan de ribben raakt, en die welke raken aan drie ribben en de verlengden van de drie andere; ten slotte kan men nog combineeren het raken aan sommige ribben (of aan hun verlengden) en aan een zijvlak.

Resumeerende zou men dus zeggen, dat deductieve Stereometrie geen kinderkost is, maar, nog eens, de ervaring heeft het laatste woord.

Een kolossaal verschil tusschen Méray en de andere meetkunde-boeken bestaat in het aantal axioma's, en dat niet alleen in 't begin. Van de bewering dat het heele gebouw van de Meetkunde op twee of drie axioma's opgetrokken kan worden, komt men vrij algemeen terug, en terecht wordt beweerd, dat buiten die axioma's nog zeer dikwijls van de aanschouwing gebruik wordt gemaakt, m. a. w. dat in de beginselen veel meer physisch te werk wordt gegaan dan men vroeger meende; dat, wil men een eerlijk systeem geven, men telkens dient aan te geven wanneer men een beroep doet op de aanschouwing (al kan een mathematicus van den ouden stempel hier misschien met eenig recht vragen, waar dat ophoudt; Méray zegt zelf in zijn inleiding: „il faut appuyer les démonstrations sur quantité de menus faits en faveur desquels on ne peut alléguer que leure évidence et dont l'énonciation catégorique serait inutile et promptement fastidieuse").

Om verschillende redenen zullen we het boek niet,

hoofdstuk voor hoofdstuk, uitvoerig bespreken, maar alleen op de meest karakteristieke passages wijzen, ons hier en daar een oordeel veroorlovend.

Als eerste axioma wordt gegeven „Twee figuren, waarvan ieder aan een derde gelijk is, zijn onderling gelijk." Kort daarna worden punt, lijn en oppervlak besproken, zonder dat er een scherpe bepaling van gegeven wordt. Zoo wordt van de lijn gezegd: „l'Idée de ligne nous vient des corps très allongés mais extrémement déliés autrement, comme un fil jeté par une araignée entre deux arbres, la trace lumineuse apparente d'un point brillant animé d'une grande vitesse, celle laissée sur un corps solide par le frottement léger d'un morceau de craie très pointu, d'un pinceau très ténu chargé de couleur, etc." En op analoge manier zegt hij wat een punt en wat een oppervlak is, om ten slotte daaraan toe te voegen: „Ce sont là de simples images des lignes et des surfaces, données provisoirement et incapables de prêter la moindre assiette au raisonnement; pour cela il faut des propriétes précises, définissant chacune d'elles avec l'exactitude mathématique." 't Is zeker beter zóó te werk te gaan, dan zooals b.v. Casey nog in een bewerking van Euclides van 1890 direct begint: „A point is that which has position but not dimensions."

Tot de rechte lijn en het platte vlak overgaande, zegt Méray verder „La droite est une ligne, le plan est une surface, dont les premières propriétés (absolues et relatives) sont irréductibles par voie déductive à des faits plus simples, dont la définition, par suite, ne peut être donnée autrement que par l'affirmation de ces propriètés, accompagnée de références à quelques images matérielles."

Het essentiëele kenmerk voor rechte lijn en plat vlak bij Méray is, dat ze op meerdere manieren in zich zelve kunnen voortbewogen worden, het glijden over zich zelve, de definitie, die ook Poincaré daarvoor aanbeveelt. Evenwijdigheid en loodrechte stand worden verder axiomatisch gehaald uit de cinematische begrippen translatie en rotatie. Meestal wijst hij bij zijn grondeigenschappen op feiten uit de praktijk, zoo bij het over elkaar glijden van twee vlakken op den wrijfsteen van de ververs. We vergaten nog te doen uitkomen, dat ook het samenvallen van twee platte vlakken, als zij drie punten gemeen hebben, als axioma gegeven wordt. Eerst op blz. 82 krijgt men te hooren wat

drie- en veelhoeken zijn, en de cirkel komt eerst op blz. 285, omdat de schrijver zich gebonden heeft aan den regel eerst de rechtlijnige figuren af te handelen. Of dat pedagogisch juist is, betwijfelen we, en hoe het mogelijk is dat de leerlingen door dit boek *na zes weken* al kunnen beginnen met beschrijvende meetkunde, (zooals hij in zijn voorrede zegt, terwijl er N. B. een paar regels verder staat: „Très lent au début, où le maître doit se garder de toute hâte parce qu' il s'agit de faits primordiaux, chacun extrêmement facile mais nouveaux et fort nombreux, faits auxquels il faut laisser le temps de pénétrer dans l'esprit, de s'y classer, au point que leur maniement devienne un simple jeu")... dat zien we heelemaal niet in.

Gelijkvormigheid en congruentie worden in één hoofdstuk behandeld, met de eerste wordt begonnen. De projectiestelling in den driehoek wordt uit de gelijkvormigheid gehaald, en daar wéér uit, als bijzonder geval, het theorema van Pythagoras; dit laatste moet dan dienen om te bewijzen, dat in een rechthoekigen driehoek de schuine zijde langer is dan een van de rechthoekszijden.

Dan wordt de theorie van de gelijkvormigheid weer voortgezet; dat twee driehoeken met evenredige zijden gelijkhoekig zijn, wordt uit de projectie-stelling gehaald; deze dient later ook om te bewijzen, dat in een driehoek ééne zijde grooter is dan het verschil van de twee andere, en ten slotte om een driehoek uit zijn drie zijden te construeeren (de cirkel is dan nog niet behandeld). O. i. behandelt schrijver de Meetkunde *te* algebraïsch; zoo doctrinair als het is alle Algebra uit de Meetkunde te willen weglaten, zoo doctrinair is het, ten minste voor jeugdige leerlingen, alle aanschouwing uit te sluiten. Niet anders dan goedkeuren kan men de opname van de allereerste beginselen der Goniometrie en der Trigonometrie; trouwens, in moderne Duitsche en Engelsche leerboeken geschiedt dit ook.

De theorie van de gebogen oppervlakken wordt ingeleid met die van de limieten. Om te beoordeelen of schrijver hier den waren toon voor jeugdige leerlingen heeft weten aan te slaan ga men de volgende eigenschappen na:

I. Quand, dans une figure variâble *f* douée d'une position-limite F, une quantité V variable aussi (segment, angle...) est pourvue d'une limite V et ne dépend que des points *m*, *n* ... ayant tous des positions-limites M, N ..., la quantité-limite

V dépend de la même maniére des points limites M N....

II. Si; dans une figure variable f, des points m, n, et des quantités variables $u, v....$, sont en en nombre et de nature telles qu' à chaque instant la connaissance de leurs positions et valeurs détermine complètement l'état contemporain de cette figure, et si ces points et quantités ont tous des positions limites M, N...., et des valeurs-limites U, V...., déterminant aussi une figure F de même genre cette figure F est la position-limite de f.

Een soortgelijken indruk maken de restricties bij constructies van een driehoek b.v., dat de twee gegeven zijden niet nul mogen zijn!

De schrijver behandelt verder de begrippen: macht, pool en poollijnen, inversie en transversalen; de regelmatige veelvlakken daarentegen worden niet behandeld.

In een aanhangsel no. 1 wordt de anharmonische snijding behandeld; in no. 2 de willekeurige verplaatsing van een onveranderlijke figuur; in aanhangsel no. 3 wordt als theorema van Mannheim een kleine variatie gegeven van wat in Rouché et de Comberousse theorema van Luchterhand heet; beide boeken hebben de onnauwkeurigheid gemeen te zeggen, dat het theorema alleen geldt voor punten in het vlak van den vierhoek. Aanhangsel IV behandelt de kegelsneden; daarbij wordt, vreemd genoeg in een boek dat zijn oorsprong vindt in een noodzakelijk geachte fusie van Planimetrie en Stereometrie, er *niet* van uitgegaan, dat die figuren in den letterlijken zin des woords kegelsneden zijn, maar van de eigenschap dat zij de meetkundige plaats zijn van de punten, waarvoor de verhouding tusschen de afstanden tot een punt en tot een lijn standvastig is. Ten slotte worden de schroeflijn en de schroefbeweging behandeld. Het boek eindigt met honderd „specimens" van vraagstukken over de eerste vijf hoofdstukken.

Niet zonder huivering schrijven we ons eindoordeel hier nêer, maar toch moet het ons van het hart dat we het boek, zooals het daar ligt, totaal ongeschikt voor *jeugdige* leerlingen vinden. Motieven voor dit oordeel vindt men reeds bovenaan gegeven; de heele opzet van dit boek is te geleerd, te abstract, te algebraïsch, dan dat jongens van dertien jaar er van gediend zouden zijn.

De vakman zal ongetwijfeld genieten van de mooie manier waarop de schrijver tegelijkertijd Planimetrie en Stereometrie behandelt, hij zal gefrappeerd worden door

de talloos nieuwe gezichtspunten, zoo op het gebied der axioma's, maar geheel voldaan zal ook hij niet zijn, vooral als hij eerst gelezen heeft in de Enseignement mathématique, de vernietigende critiek, die Méray uitgesproken heeft over wat hij noemt het klassieke onderwijs in de Meetkunde. In die critiek worden o. a. bewijzen veroordeeld die haast iedereen bevredigen; zoekt men nu wat Méray daarvan gemaakt heeft dan vindt men, „op het bewijs kunnen we hier niet nader ingaan, dat hoort in hoogere Wiskunde tehuis"; en zoo komen wij op het gebrek van Méray's werk: het wil een boek voor den leerling en voor den leeraar zijn. Die tweeslachtigheid straalt al door in de voorrede; daar wordt eerst het groote voordeel aangegeven van de onderscheiding van positieven en negatieven zin, en dan volgt er: „J'ai utilisé ce moyen dans quelques questions complémentaires où il est presque impossible de s'en passer, et qui sont imprimées en caractères plus petits; mais je n'ai osé le faire nulle part dans le corps même de l'ouvrage." In zijn boek geeft hij in een noot een tweede bewijs voor een stelling; daarna zegt hij: „cette marche serait beaucoup plus intuitive et directe à la fois, car l'introduction de la droite auxiliaire est un pur artifice. Mais certains esprits pourraient se récrier contre cette tournure du raisonnement."

Nogal vreemd in een hervormer!

Bij de bepaling van de lengte van den cirkel geeft hij direct, zonder eenige berekening, de grootte van π er bij voegende: „les procédés *naturels* pour obtenir ce nombre π reposent sur des principes bien audessus des Eléments", en bij het oppervlak van den cirkel wijdt hij vier bladzijden aan de berekening van π, om dan zóó aftebreken: „Mais nous bornerons à cette indication, pensant avoir beaucoup trop insisté déja sur une question dont l'intérêt historique ne compense pas du tout l'aridité et la complète inutilité".

Jammer is het o. i. dat Méray niet eerst een boek voor meer gevorderden heeft geschreven, en verder een leeraar met veel praktijk, onder zijn contrôle, een leerboek heeft laten schrijven voor de school.

Hopen we dat het daartoe nog eens komt.

C. A. Cikot.

Darstellende Geometrie von Dr. C. Beyel, Dozent am Polytechnicum in Zürich.

Onder de boeken die in een voorgaande afl. voor de studie aanbevolen werden, komt ook het bovenstaande voor. Omdat het in ons land, naar ik meen, vrij wel onbekend is, niettegenstaande het toch een zeer goed boek is, wil ik er even de aandacht op vestigen.

Het voorbericht is al zeer lezenswaardig. S. begint met te zeggen dat hij, met orthogonale projecties beginnende, aan het einde van zijn boek figuren in scheeve paralelprojectie laat overbrengen. „Wir haben gefunden dasz in vielen Fällen eine solche Uebertragung — von Anfang an geübt — das Sehen in Raume vortrefflich unterstützt." Terloops zij hier opgemerkt dat men het in Duitschland doelmatiger vindt met deze projectie te beginnen. (Zie ook de stellingen die de heer Vaes te Almelo in de Wiskunde-sectie heeft ingeleid). Om de beknoptheid van het boekje te verklaren zegt hij in een noot „Wir glauben überhaupt dasz die darstellende Geometrie — ebenso wie eine fremde Sprache — nur von Lehrern im Zeichnung saale und nicht aus Büchern gelernt werden kann." Een soortgelijke overweging heeft hem er toe gebracht maar een heel enkele figuur te geven.

S. beweert dat hij door zijne methode sinds jaren bereikt heeft zijn leerlingen in een minimum van tijd in de systematiek van het vak in te leiden, en hen tegelijkertijd te geven de noodige oefening in het teekenen en in het lichamelijkzien. „Und das musz ja das Hauptbestreben der modernen Pädagogik sein — nich sowohl jedem Fache einen möglichst breiten Raum zu erobern sondern die Methoden so zu entwickelen dasz Zeit erspart wird". (Mooi klopt hiermêe wat Prof. Delbrück dezen zomer, als vertegenwoordiger van de Universiteit sprak bij de opening van de vergadering van leeraars in de exacte wetenschappen in Jena. Na er op gewezen te hebben dat hij moeite had om het tiende te lezen van wat hij noodzakelijk voor zijn vak (Sanskriet) lezen moest zei hij: „Wenn es alzo auszerordentlich schwer wäre, sich in der jetzigen geistigen Zeit zurecht zu finden, so ware es um so mehr Schweiszes des Edlen wert, dasz unsere Jugend Keine Zeit verlöre, dasz alle Mühen darauf verwandt würden, den Unterrichtsstoff fruchtbar zu gestalten").

Na de verklaring zijner notaties (wanneer zullen we hierin eens, zooal niet eene internationale, dan toch eene nationale, eenheid krijgen?) en eene korte uiteenzetting

van het doel der beschrijvende meetkunde, begint hij met het aannemen van de projectie-vlakken; S. begint ook direct met het derde, en is dus van meening (en onze 23-jarige ondervinding klopt hiermee), dat het derde vlak niet, zooals wel beweerd wordt, in den beginne de zaak te moeilijk maakt. Van z.g. nieuwere en projectieve meetkunde is in het boek weinig of niets te vinden; trouwens, voor de middelbare scholen is de vermenging van die twee onderdeelen der meetkunde, hoe mooi ook voor den meergevorderde, tamelijk wel doelloos.

In het boekje wordt (in 55 bladzijden) het vak behandeld met inbegrip van de doordringing van gebogen oppervlakken; in een aanhangsel wordt nog o. a. de schaduwleer en de scheeve parallel-projectie behandeld (perspectief geeft het boekje weinig of niet). 1800 disposities van vraagstukken besluiten het boek; dat getal 1800 moet men echter met een korrel zout nemen; van ieder vraagstuk worden er $\pm$ 6 gemaakt door variatie in stand van de gegevens.

Het boek is, zooals men dat van Teubner gewend is, behoorlijk gedrukt, en in een stevigen linnen band gebonden.

C. A. Cikot.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publieé par les soins de B. Baillaud et H. Bourget avec une préface de Émile Picard, membre de l'Institut (Paris, Gauthier-Villars, 1905).

Tome I (8 Nov. 82—22 Juli 89) 477 bladzijden.

Deze briefwisseling is behalve uit een wiskundig, ook uit een nationaal oogpunt van belang. Immers Thomas Jan Stieltjes Jr. was nederlander (in 1856 te Zwolle geboren), een van hen, voor wie geen plaats was in ons land.

Zoon van den in ingenieurskringen bekenden krijgs- en waterbouwkundige Dr. Th. Stieltjes, lag het voor de hand, dat hij ook de ingenieurs-loopbaan zou kiezen. Den cursus aan de Polytechnische School volgde hij echter niet tot aan het eind.

Examen-doen was voor hem een onmogelijkheid; bij examen B werd hij tweemaal afgewezen; aan de universiteit, waarheen hij daarna ging, promoveerde hij niet. Den doctorstitel werd hem in 1885 toegekend honoris causa.

Te Leiden werd hij binnen het jaar verbonden aan het astronomisch observatorium, doch meer en meer bleek zijn neiging voor zuivere wiskunde.

Door studies op dat gebied kwam hij in correspondentie met Hermite.

Na het overlijden van v. d. Berg, werd S. benoemd tot leeraar aan de Polytechnische School, (1883), doch bleef slechts drie maanden daar. De studenten klaagden, dat zij zijn lessen niet konden volgen, omdat hij voortdurend naar het bord gekeerd stond en te zacht sprak.

Verwonderlijk is, dat aan de Universiteit te Toulouse, waar hij in 1886 werd benoemd, het college geven geen bezwaren gaf; eveneens verwonderlijk dat hij het fransche doctoraat kon verkrijgen na het verdedigen van een stelling.

Slechts 8 jaar bleef hij aan de universiteit te Toulouse verbonden, den 31 Dec. 1894 stierf hij, 38 jaar oud, in Frankrijk gevierd, in Nederland vergeten.

Men beschouwt hem in Frankrijk als een *fransch* wiskundige. De briefwisseling loopt in hoofdzaak over onderwerpen uit de rekenkunde en de functieleer; algebraïsche kettingbreuken van bijzondere soort, in verband gebracht met een bepaalde integraal waren een bijzondere studie van S.

Oeuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par M.M. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Membres de l'Institut. (Paris, Gauthier Villars, 1905). Tome II, Géométrie. 715 blz. (22 frs.)

De werken van Edmond Laguerre-Verly zijn door de zorgen van de Fransche Academie in twee deelen vereenigd. Het 1e deel bevat verhandelingen over Algebra en Integraalrekening, het 2e deel meetkundige onderwerpen (en één algebraïsch, dat bij het 1e deel behoort).

Het 1e stukje in deel II werd in 1852 in de Nouv. Ann. de Math. geschreven door den Elève de l'Institution Barbet; het laatste stuk dateert van 1885.

Onder de 82 groote en kleine verhandelingen is ook de 1e les opgenomen van de Cours de Géom. Superieure, in 1870 door L. gegeven: Sur l'emploi des imaginaires en Géometrie.

Le Calcul des Résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par Ernst Lindelöf.

(Paris, Gauthier-Villars 1905, 141 bladz.)

Onder toezicht van E. Borel worden monographieën uitgegeven over functieleer; verschillende personen, die zich

op dat gebied bewogen hebben, worden aangezocht onderdeelen van dezen tak van wiskunde te behandelen. Werken als dit onderstellen bij den lezer kennis van de functieleer; een studie van de werken van Borel (of anderen) daarover behoort dus vooraf te gaan. Uitgaande van onderzoekingen van Cauchy geeft L. resultaten van eigen onderzoek.

Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres, par Claude-Gaspar Bachet, sieur de Méziriac. (4me Edition, Paris, Gauthier-Villars 1905, 161 bladz.)

Dit werkje is een herdruk van een in 1612 verschenen boekje met vragen (kunstjes) op het gebied van rekenkunde, algebra en getallenleer.

Eenige zijn door mondelinge overleveringen nog thans bekend; andere zijn door Lucas overgenomen in zijn (vierdeelig) werk: Recréations mathémathiques.

In het boekje is niet vermeld, dat de heer Labosne den herdruk bezorgd heeft.

Vraagstukken.

(*Oplossingen kunnen worden ingezonden aan den Hoofdredacteur vóór 25 Februari 1906. Nieuwe opgaven, vergezeld van de oplossingen, worden gaarne verwacht.*

Verzoeke het papier slechts aan één kant te beschrijven, en voor elke oplossing een afzonderlijk vel papier te nemen).

71. Als men om een ellips parallelogrammen beschrijft, is het product van het oppervlak van zoo'n parallelogram en van dat, hetwelk de raakpunten tot hoekpunten heeft, standvastig. C. A. Cikot.

72. Om een ellipsoïde kunnen onbepaald veel octaëders beschreven worden, die hun hoekpunten op de assen hebben; welke heeft minimum-inhoud? C. A. Cikot.

73. Als men in een bol een cilinder beschrijft, en om den bol twee kegels, die hem resp. volgens grond- en bovenvlak van den cilinder omhullen, dan is het product van dien cilinder en den gevormden dubbelen kegel constant. Gevolgen? C. A. Cikot.

74. Zeker lichaam is uitsluitend door driehoeken begrensd; in gelijkstandige punten van de Euler-lijnen voor die zijvlakken werken krachten, loodrecht gericht op de zijvlakken, daarmede evenredig, en òf alle naar binnen òf alle naar buiten gericht; bewijs dat die krachten met elkander in evenwicht zijn. C. A. Cikot.

(Eulerlijn noemt men de lijn, waarop zwaartepunt, hoogtepunt, middelpunt van den omgeschreven cirkel, en middelpunt van den negenpuntscirkel liggen).

75. Dr. Hollman geeft in het tweede deel van zijn vraagstukken over analytische meetkunde in de ruimte onder no. 186 het volgende vraagstuk op:

„Wanneer een ellipsoïde zoodanig bepaald is, dat zij door twee der drie door haar middelpunt gaande onderling rechthoekige coördinaten-vlakken volgens cirkels gesneden wordt, dan maken de vierkanten der halve assen een harmonische reeks uit." Hij geeft daarvan een vrij ingewikkeld bewijs, waarin o.a. een derdemachtsvergelijking moet opgelost worden. Men vraagt een eenvoudig en kort bewijs. C. A. Cikot.

76. Door het middelpunt van een ellipsoïde brengt men vlakken aan; op de normaal van die vlakken, in het middelpunt opgericht, zet men een stuk uit evenredig met de grootte der doorsnede; gevraagd de meetkundige plaats van de uiteinden. C. A. Cikot.

77. Wat is de meetkundige plaats van de middelpunten der cirkels die, bij een ellips, raken aan de verlengden der voerstralen van eenzelfde punt, en aan de groote as?

C. A. Cikot.

78. Twee kegelsneden hebben een brandpunt gemeen. Men trekt 2 gemeenschappelijke raaklijnen en de richtlijnen. De lijn, die het gemeenschappelijk brandpunt verbindt met het snijpunt der raaklijnen staat loodrecht op de lijn, die hetzelfde brandpunt verbindt met het snijpunt der richtlijnen. H. v. Dinter.

79. Van een driehoek geeft men de zwaartelijn naar de basis in ligging en grootte en den tophoek.

Men vraagt naar de meetkundige plaats van de uiteinden der basis, de middens der opstaande zijden, het middelpunt van den omgeschreven cirkel en het hoogtepunt.

H. v. Dinter.

80. Men vraagt op overeenkomstige wijze als het zwaartepunt van een trapezium bepaald werd, (jaarg. I bl. 78) het zwaartepunt van een afgeknotte pyramide te bepalen. DR. N. QUINT.

81. Bekend is, dat het zwaartepunt van een vierhoek, welks diagonalen elkander in S snijden samenvalt met dat van massa's 1 in de hoekpunten en een massa —1 in S. In overeenstemming hiermede heeft men de stelling:

Het zwaartepunt van een achtvlak, welks diagonalen elkander in S snijden, valt samen met dat van massa's 1 in de hoekpunten, en een massa — 2 in S.

DR. N. QUINT.

Dit vraagstuk is niet nieuw, doch wordt opgegeven in verband met de verhandeling van den heer Cikot in den 1en jaargang W. T.

82. Ontwikkel $bg \tan (\cot \theta + h)$ volgens opklimmende machten van $h \sin \theta$. C. v. SPAENDONCK.

83. Een parabool rolt over een rechte lijn. Bepaal de meetkundige plaats van het brandpunt, en bewijs dat de de directrix een gelijke kromme omhult, die symmetrisch ligt ten opzichte der lijn. C. v. SPAENDONCK.

84. Wanneer men van een geheel willekeurig door platte vlakken begrensd lichaam met H hoekpunten, waarop de wet van Euler toegepast kan worden, een uitslag (netwerk) heeft geteekend, dan moet men bij het samenstellen van het lichaam H — 1 paren ribben bij elkander brengen.

F. J. VAES.

85. Een punt beweegt zich op een kromme lijn zoodanig, dat de snelheid steeds gelijk is aan den doorloopen boog, gerekend van af een vast punt A van de kromme lijn. Men vraagt een eenvoudige constructie voor de richting en de grootte der versnelling op een willekeurig oogenblik.

F. J. VAES.

86. In *Rouché et de Comberousse, Traité de géometrie, 7en druk, vraagstuk no. 88, pg. 378, en*

Versluys, Meetkundige vraagstukken voor gevorderde leerlingen, no. 5, pg. 27, bij het hoofdstuk Om- en ingeschreven vierhoek, komt het vraagstuk voor:

Trekt men door het snijpunt O der diagonalen van een in een cirkel M beschreven vierhoek ABCD een koorde

EOF, welks midden O is, dan zal het deel van deze koorde begrepen tusschen de overstaande zijden van den vierhoek ook door O middendoorgedeeld worden.

Dit vraagstuk is voor uitbreiding vatbaar.

Trekt men door een punt Q binnen een cirkel M de minimum koorde EOF, en twee andere koorden AOC en BOD, dan zal elke kegelsnede gaande door de vier punten A, B, C, en D de lijn EOF in twee punten snijden, evenver van O gelegen. G. C. v. d. Want Jr.

87. Een trapezium te construeeren, als gegeven zijn de beide beenen en de twee diagonalen.

Dit vraagstuk werd gelijktijdig opgegeven door de heeren: V. Th. v. d. Ven en W. H. Wisselink.

88. Een vierhoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de 4 zijden, terwijl de eerste diagonaal door de andere wordt middendoor gedeeld. W. H. Wisselink.

89. Vier concentrische cirkels zijn gegeven; op elk dier cirkels een punt te vinden, zoodat die vier punten de hoekpunten zijn van een parallelogram. W. H. Wisselink.

90. Men denke zich uit het middelpunt van een gegeven cirkel cirkels beschreven met $\frac{1}{n}r, \frac{2}{n}r, \frac{3}{n}r, \frac{4}{n}r, \ldots\ldots \frac{n-2}{n}r$ en $\frac{n-1}{n}r$ als stralen (r = straal des gegeven cirkels), terwijl de oppervlakken van den kleinsten cirkel en van de achtereenvolgende ringen *per vierkante eenheid* (continu) in waarde afdalen van p tot q, volgens eene rekenkundige reeks. Gevraagd, langs elementairen weg de betrekking te vinden tusschen x r, p en q, voor toenemende waarden van n, als x den straal voorstelt van dien cirkel, welks omtrek de „waarde" van den oorspronkelijken cirkel halveert.

Na de algemeene oplossing neme men $q = 0$ enz.

W. H. Wisselink.

Vraag en Antwoord.

Vraag 1. Welke werken moeten bestudeerd worden voor de akte M. O. Wiskunde Kv, door iemand, die Ki verkregen heeft.

A. V.

Vraag 2. Men verlangt een eenvoudige *meetkundige* oplossing van de volgende vraag uit Briot et Bouquet: „De meetkundige plaats te bepalen van de toppen van de omwentelingskegels, beschreven om een ellipsoïde".

C. A. Cikot.

Correspondentie.

De noot van Montucla, waarop de heer Gravelaar doelt op bl. 12 van deze aflevering, luidt aldus:

„Bij gelegenheid der sinussen, waarvan hier, als van eene vinding der Arabiërs, gesproken wordt, zie hier eene afkomst van dien naam, die 't eenemaal gelukkig en waarschijnlijk is. Ik ben dezelve aan den heer *Godin*, lid van de Koninglijke Academie van Wetenschappen, directeur der Schoole van de Zeevaart te *Cadix*, verschuldigd. De sinussen zijn, zoo als men weet, helften van peezen, en de peezen worden in 't Latijn *inscriptae* genoemd. De sinussen zijn derhalve *semisses inscriptarum*, hetgeen men waarschijnlijk, kortheidshalve, aldus schreef, *s. ins.* waaruit naderhand, door misverstand, het woord sinus ontstaan is."

Dr. N. Quint.

In de correspondentie van het vorige nummer, pg. 284, vergist zich de heer Gouwentak als hij zegt: „Op blz. 101 is het woord cosini gebruikt — dit moet zijn cosinus. Dit zou juist zijn indien men het wil afleiden uit sinus = zeeboezem, enz." Het laatste is onjuist; het meervoud van sinus is niet sini maar sinus. Verder schijnt de heer Gouwentak niet bekend te zijn met de verklaring van het woord sinus in deze beteekenis door Cantor in zijn geschiedenis der wiskunde gegeven. Volgens dezen is de oorsprong als volgt: „koorde", later „halve koorde" was in het sanskriet „jîva." De Arabieren schreven hiervoor „dschîba" en lazen dit later „dschaib" = inham, boezem. Dit werd in het latijn vertaald „sinus."

O. Postma.

Men zie bladzijde 12 van deze aflevering. Red.

Verbuiging van „sinus". (Jaarg. I. blz. 284). Al was het een feit, dat dit woord in zijn goniometrische beteekenis niets te maken heeft met hetzelfde woord in de beteekenis van boezem, dan volgt daaruit nog niet, dat het woord in zijn eerstgenoemde beteekenis ook op een andere wijze

verbogen moet worden. Mijns inziens beslist hier het *gebruik*, hetwelk nu eenmaal het woord sinus in *beide* beteekenissen tot een woord van de vierde declinatie gestempeld heeft. Zoo werd b.v. een sinustafel in het latijn „tabula sinuum & tangentium" genoemd. C. S.

De beschouwing van den bolvijfhoek door den heer de K. gegeven op bl. 213, 1en jaargang komt voor in Lobatto's Leerboek der Regtlijnige en Bolvormige Driehoeksmeting, derden druk, bewerkt en vermeerderd door Dr. P. van Geer. (S. en W. N. van Nooten, Schoonhoven, 1869), No. 90 (bl. 126 en volgd.) behoorende tot § XIV. De teekening vindt men op de uitslaande plaat VI, fig. 41.

Kampen. C. Stolp.

Op pg. 254 van den eersten jaargang komt een afleiding voor van de formule voor den slingertijd, op de constante na, overgenomen uit een Engelsch tijdschrift. Ik neem de vrijheid er de aandacht op te vestigen dat de afleiding van deze en andere formules op een dergelijke wijze met behulp van dimensievergelijkingen reeds eenige jaren geleden een onderwerp van uitvoerige discussie is geweest in het „Zeitschrift für den Phys. u. Chem. Unterricht". Zie daarvoor de jaargangen XI p. 70, XII p. 14, 40, 139, 144, 169, en XIII p. 18. 146.

De hier gegeven afleiding zou misschien eenig meerder vertrouwen wekken, wanneer er in de plaats van „axiomathisch invoerend" had gestaan: „als geheel juist bij den mathematischen slinger aannemend, wat bij den physischen bij benadering geconstateerd is", wat er niet zooveel van verschilt maar wat beter klinkt. De zaak blijft natuurlijk dat men dit „als volkomen juist postuleeren, wat men bij benadering constateerde", wat bij de grondeigenschappen wel geschieden moet, niet telkens weer in een goed wetenschappelijk systeem mag herhalen.

Leeuwarden. O. Postma.

Van het *Archief van Wiskunde* bezit ik enkele afleveringen dubbel, terwijl ik enkele andere mis. Zou er door middel van Uw tijdschrift gelegenheid zijn, om misschien dit met weinig kosten te completeeren.

Utrecht. W. H. Schmelling.

Onder no. 62 komt op blz. 279 van afl. IV eersten jaargang een vraagstuk voor, dat ik reeds heb opgelost op

bl. 138 en 139 van mijne Opl. der vraagstukken uit van Geer Anal. meetk. De heer Cikot had de welwillendheid me op eene onjuistheid te wijzen, voorkomende aan 't slot van die opl., nl. het verschil der opst. zijden is niet constant; immers dan moesten de basiseinden brandpunten zijn der hyperb., en dat kan niet, omdat een draaiing noodig is. Tevens moge hier vermeld worden, dat aan 't eind van vraagst. 6 blz. 138 staat: „wier *toppen* liggen in de basiseinden"; dit dient gelezen: „wier *brandpunten* liggen in de basiseinden.

Leeuwarden. H. Siersma Jr.

Zoowel in afl. 2 en 3, als nu weer in 4 komen vraagstukken voor, die ook voorkomen, *de meeste zelfs opgelost*, in meer dan één bekende verzameling. In aflevering 4 is dat met eenige achtereenvolgende het geval. Nu geef ik onmiddellijk toe, dat het nut *kan* hebben zoo'n vraagstuk te stellen, vooral om een eenvoudige oplossing te geven of uit te lokken; maar dan dient men er dat bij te voegen, en zeer zeker dient men aan te geven, dat men dat vraagstuk niet zelf gemaakt heeft. C. A. Cikot.

Nieuw verschenen werken.

(Ontvangen door de Redactie).

W. M. VAN EEK. Algebraïsche opgaven voor inrichtingen van meer uitgebreid en middelbaar onderwijs. Vijfde, geheel omgewerkte druk door Dr. A. D. van der Harst, Haarlem, H. D. Tjeenk Willink en Zoon 1905. f 1.00

H. WEBER und J. WELLSTEIN. Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende, II Elementare Geometrie, Leipzig B. G. Teubner 1905.

Dr. L. KIEPERT. Grundrisz der Differential-und Integralrechnung.
I Differentialrechnung. Zehnte Auflage (816 bl.). Hannover, Helwigsche Verlagsbuchhandlung, 1905.

Uit de Theorie der Algebraïsche Vergelijkingen

DOOR

K. BES (Tilburg).

(*Vervolg van blz. 10*).

§ 16. Vervangt men in een determinant van de n^{de} orde de elementen van k rijen (of kolommen) door de onderdeterminanten van die elementen, met inbegrip van het teeken $+$ of $-$, dat aan iederen onderdeterminant toekomt, dan vormen deze k rijen (of kolommen) een assemblant, die met den assemblant gevormd door de $n-k$ overblijvende rijen (of kolommen) een nieuwen determinant vormt. De eerste assemblant heet dan *geadjungeerde assemblant* van de k^{de} orde ten opzichte van den oorspronkelijken determinant.

§ 17. *De determinanten der hoogste orde bevat in een geadjungeerden assemblant van de k^{de} orde staan tot de supplementaire determinanten van zijn verwanten assemblant in eene standvastige verhouding, welke gelijk is aan de $k-1^{de}$ macht van den oorspronkelijken determinant.*

Om deze eigenschap te bewijzen, wordt het geval genomen, waarin $k=3$ en $n=5$ is. Men heeft dan de volgende herleiding:

$$A \times \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & a_4^1 & a_5^1 \\ 0 & A & 0 & a_4^2 & a_5^2 \\ 0 & 0 & A & a_4^3 & a_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4^4 & a_5^4 \\ 0 & 0 & 0 & a_4^5 & a_5^5 \end{vmatrix} = A^3 \times \begin{vmatrix} a_4^4 & a_5^4 \\ a_4^5 & a_5^5 \end{vmatrix}; \text{ dus}$$

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = A^2 \times \begin{vmatrix} a_4^4 & a_5^4 \\ a_4^5 & a_5^5 \end{vmatrix}, \text{enz.}$$

Opmerking. De eigenschap van § 15 kan beschouwd worden als een bijzonder geval van deze, namelijk het geval, waarin $k = n$ is.

Neemt men $k = n - 1$, dan verkrijgt men de eigenschap:

De onderdeterminanant van een geadjungeerden determinant zijn gelijk aan de elementen van den oorspronkelijken determinant, vermenigvuldigd men de $n-2^{de}$ macht van den oorspronkelijken determinant.

§ 18. Verwante assemblanten, die de eigenschap hebben, dat tusschen hunne supplementaire determinanten eene standvastige verhouding bestaat, heeten *supplementaire assemblanten.*

Uit § 17 volgt nu de eigenschap:

Een geadjungeerde assemblant vormt met zijn verwanten assemblant een paar supplementaire assemblanten.

§ 19. De rijen (of kolommen) van een assemblant zijn door eene *lineaire betrekking* verbonden, als men nul tot som verkrijgt, wanneer men de overeenkomstige elementen van de rijen (of kolommen) samentelt, nadat deze met bepaalde getallen vermenigvuldigd zijn.

De getallen, waarmede de elementen der verschillende rijen (of kolommen) vermenigvuldigd moeten worden om nul tot som te geven, heeten de *coëfficienten der lineaire betrekking*, die tusschen de rijen (of kolommen) bestaat.

Bestaat er tusschen eenige rijen (of kolommen) van een assemblant geen lineaire betrekking, dan zegt men dat die rijen (of kolommen) *onafhankelijk* zijn van elkaar.

§ 20. Men verkrijgt nu de volgende eigenschappen:

1. *Een determinant, waarvan eenige rijen (of kolommen) door eene lineaire betrekking verbonden zijn, heeft de waarde nul.*

Vermenigvuldigt men de bedoelde rijen (of kolommen) met de coëfficienten der lineaire betrekking, die tusschen hen bestaat, en telt men daarna bij een der rijen (of kolommen) de overige op, dan verkrijgt men een determinant, waarvan een der rijen (of kolommen) uit nullen bestaat.

2. *Heeft een determinant de waarde nul, terwijl de onderdeterminanten niet alle gelijk aan nul zijn, dan zijn zoowel*

de rijen als de kolommen door eene lineaire betrekking verbonden.

In dit geval vormen de onderdeterminanten van de elementen eener willekeurige rij de coëfficienten eener lineaire betrekking, die tusschen de kolommen bestaat, terwijl de onderdeterminanten van de elementen eener willekeurige kolom de coëfficienten vormen eener lineaire betrekking, die tusschen de rijen bestaat.

3. *Alle determinanten der hoogste orde bevat in een assemblant, waarvan het aantal kolommen (of rijen) kleiner is dan dat der rijen (of kolommen), hebben de waarde nul, ingeval eenige kolommen (of rijen) door eene lineaire betrekking verbonden zijn.*

4. *Ingeval alle determinanten der hoogste orde bevat in een assemblant de waarde nul hebben, terwijl het aantal kolommen (of rijen) kleiner is dan dat der rijen (of kolommen), dan bestaat tusschen de kolommen (of de rijen) eene lineaire betrekking.*

Deze eigenschappen volgen onmiddellijk uit de twee vorige.

§ 21. Een determinant is *symmetrisch*, als de elementen gelijk zijn, welke van dezelfde twee indices voorzien zijn. In een symmetrischen determinant heeft men dus $a_l^k = a_k^l$ en $A_l^k = A_k^l$.

Men verkrijgt een symmetrischen determinant, als men een willekeurigen determinant tot de tweede macht brengt, bijv.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

Evenzoo kan de som der kwadraten van de determinanten der hoogste orde, welke in een assemblant bevat zijn, worden voorgesteld door een symmetrischen determinant van dezelfde orde, bijv.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3+d_1d_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3+d_2d_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3+d_1d_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3+d_2d_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2+d_3^2 \end{vmatrix}$$

Een symmetrische determinant kan op eene bijzondere wijze ontwikkeld worden volgens de elementen eener willekeurige rij, bijv. naar die van de eerste rij. Voor iederen determinant geldt namelijk de volgende ontwikkeling:

$$\begin{aligned} A &= a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + a_3^1 A_3^1 + \ldots\ldots + a_n^1 A_n^1 = \\ &= a_1^1 A_1^1 - a_2^1 a_1^2 A_{1,2}^{1,2} + a_2^1 a_1^3 A_{1,2}^{1,3} - a_2^1 a_1^4 A_{1,2}^{1,4} + \ldots\ldots \\ &\qquad + a_3^1 a_1^2 A_{1,3}^{1,2} - a_3^1 a_1^3 A_{1,3}^{1,3} + a_3^1 a_1^4 A_{1,3}^{1,4} - \ldots\ldots \\ &\qquad - a_4^1 a_1^2 A_{1,4}^{1,2} + a_4^1 a_1^3 A_{1,4}^{1,3} - a_4^1 a_1^4 A_{1,4}^{1,4} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van de notatie vermeld in § 2. Voor een symmetrischen determinant volgt hieruit de formule:

$$\begin{aligned} A &= a_1^1 A_1^1 - (a_2^1)^2 A_{1,2}^{1,2} - (a_3^1)^2 A_{1,3}^{1,3} - (a_4^1)^2 A_{1,4}^{1,4} - \ldots\ldots \\ &\qquad + 2\, a_2^1 a_3^1 A_{1,3}^{1,2} - 2\, a_2^1 a_4^1 A_{1,4}^{1,2} + 2\, a_3^1 a_4^1 A_{1,4}^{1,3} - \ldots\ldots (5) \end{aligned}$$

§ 22. Een determinant is *scheel symmetrisch*, als de elementen elkaars tegengestelde zijn, welke voorzien zijn van dezelfde twee indices. In een scheel symmetrischen determinant heeft men dus $a_l^k = -a_k^l$ en $a_k^k = 0$.

§ 23. Men heeft nu de volgende eigenschappen:

1. *Een scheel symmetrische determinant van oneven orde heeft de waarde nul.*

Vermenigvuldigt men alle rijen van een scheel symmetrischen determinant met -1, dan ontstaat er een nieuwe determinant, die alleen daarin van den oorspronkelijken verschilt, dat de rijen met de kolommen verwisseld zijn. Een scheel symmetrische determinant van oneven orde is dus gelijk aan zijn tegengestelde; hij heeft dus de waarde nul.

2. *De onderdeterminanten van de elementen der hoofddiagonaal zijn in een scheel symmetrischen determinant van even orde gelijk aan nul.*

Deze eigenschap volgt onmiddellijk uit de vorige.

3. *In een scheel symmetrischen determinant zijn de onderdeterminanten van twee elementen voorzien van dezelfde indices òf gelijk, òf elkaars tegengestelde, naar gelang de determinant zelf van oneven of van even orde is.*

Stelt men de onderdeterminanten op van twee elementen voorzien van dezelfde indices en vermenigvuldigt men alle rijen van den eenen met -1, dan verkrijgt men na verwisseling van de rijen met de kolommen den anderen. Hieruit volgt onmiddellijk de juistheid der stelling.

4. *Een scheel symmetrische determinant van even orde is een volkomen vierkant.*

Voor elken determinant van de n^{de} orde geldt de formule (§ 17):

$$A \times \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} = A^2 \times A', \text{ waarin}$$

$$A' \equiv \begin{vmatrix} a^3 & a_4^3 & \dots & a_n^3 \\ a_3^4 & a_4^4 & \dots & a_n^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3^n & a_4^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Als A een scheel symmetrische determinant van even orde is, dan is dit ook het geval met A'.

Verder heeft men in dit geval $A_1^1 = 0$, $A_2^2 = 0$ en $A_1^2 = -A_2^1$, zoodat men verkrijgt:

$$A \times (A_2^1)^2 = A^2 \times A'.$$

Is nu A' een volkomen vierkant, dan is dit ook het geval met A.

Een scheel symmetrische determinant van de tweede orde is een volkomen vierkant; hieruit volgt, dat dit ook het geval is met iederen scheel symmetrischen determinant van even orde.

§ 24. Door de formules (2) wordt aangewezen, hoe een determinant ontwikkeld kan worden volgens de elementen eener willekeurige rij of kolom. Nu zal worden aangetoond, hoe een determinant ontwikkeld kan worden volgens de elementen der hoofddiagonaal.

Daartoe stelt men de waarde, die de determinant A verkrijgt, als men de elementen der hoofddiagonaal door nullen vervangt, door D voor en de waarde, die de onderdeterminant A_i^i daardoor verkrijgt door D_i. Vervolgens worden de waarden der determinanten, die men verkrijgt door weglating van twee willekeurige kolommen en van twee rijen van gelijken rang als die der weggelaten kolommen, nadat in den aldus verkregen determinant de ele-

menten der hoofddiagonaal door nullen vervangen zijn, voorgesteld door $D_{i,k}$, enz.

Door invoering van de vermelde notaties verkrijgt men alsdan de formule:

$$A = D + \Sigma\, a_i^i\, D_i + \Sigma\, a_i^i\, a_k^k\, D_{i,k} + \Sigma\, a_i^i\, a_k^k\, a_l^l\, D_{i,k,l} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots\ldots a_n^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Om deze formule te bewijzen, merkt men op, dat de termen van A, welke geen element der hoofddiagonaal bevatten, overeenstemmen met de termen van D. De termen, die het element a_i^i bevatten, zijn begrepen in $a_i^i A_i^i$, dus de termen, die behalve a_i^i geen ander element der hoofddiagonaal bevatten, in $a_i^i D_i$, enz. De laatste term der formule (6) wordt gevormd door de elementen der hoofddiagonaal.

§ 25. De voorgaande formule vindt toepassing bij de berekening der waarde van *scheele determinanten*[1]). Hierdoor verstaat men determinanten waarin $a_k^i = -a_i^k$, terwijl de elementen der hoofddiagonaal niet gelijk aan nul zijn.

Komt het hierbij voor, dat de elementen der hoofddiagonaal alle gelijk zijn aan eenzelfde grootheid z, dan gaat de formule (6) over in de volgende:

$$A = z^n + z^{n-2}\, \Sigma D_2 + z^{n-4}\, \Sigma D_4 + \text{enz.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

waarin D_2, D_4, enz. symmetrische determinanten van even orde voorstellen.

VRAAGSTUKKEN.

1. Te bewijzen, dat een symmetrische determinant, afgezien van het teeken + of —, een volkomen vierkant is, wanneer een der onderdeterminanten van de elementen der hoofddiagonaal de waarde nul heeft.

2. Te bewijzen, dat, als een der elementen van de hoofddiagonaal van een symmetrischen determinant de waarde nul heeft, de geadjungeerde determinant op het teeken + of — na, alsdan een volkomen vierkant is.

3. Bewijs, dat een determinant van oneven orde van den vorm

---

[1]) Deze worden ook wel *scheeve* determinanten genoemd

$$\begin{vmatrix} -r & as & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ft & -q & bs & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & et & -p & cs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & 0 & ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ct & p & es & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & bt & q & fs \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & at & r \end{vmatrix}$$

de waarde nul heeft[1]).

4. Bereken de waarde van den determinant:

$$\begin{vmatrix} -r & as & 0 & 0 & 0 & 0 \\ et & -q & bs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dt & -p & cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ct & p & ds & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bt & q & es \\ 0 & 0 & 0 & 0 & at & r \end{vmatrix}.$$

5. Ontwikkel den determinant:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & e \end{vmatrix}.$$

HOOFDSTUK II.

Lineaire Vergelijkingen.

§ 26. Vermenigvuldigt men de elementen van iedere rij van den assemblant:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m & \dots & a_n^m \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

---

[1]) Deze determinant is besproken door Prof. W. Kapteijn in het *Nieuw Archief*, 2e Reeks, dl. VII, pag. 38. Hier wordt eene andere herleiding gevraagd.

achtereenvolgens met de onbepaalde grootheden x_1, x_2, $x_3, \ldots . x_n$, en telt de uitkomsten op, dan verkrijgt men m lineaire homogene functiën tusschen de n veranderlijken x_1, x_2, $x_3, \ldots . x_n$, welke gelijk aan nul gesteld de volgende m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden opleveren:

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + a_3^1 x_3 + \ldots + a_n^1 x_n = 0, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + \ldots + a_n^2 x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + a_3^m x_3 + \ldots + a_n^m x_n = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots . \quad (8).$$

De assemblant (1) wordt de *assemblant der coëfficienten* van deze vergelijkingen genoemd.

Een stelsel waarden, niet enkel uit nullen bestaande, die voor de onbekenden gesubstitueerd aan de lineaire homogene vergelijkingen (8) voldoen, heet een *wortelstelsel* dezer vergelijkingen.

§ 27. *Als verschillende wortelstelsels voldoen aan een stelsel lineaire homogene vergelijkingen, dan wordt aan die vergelijkingen ook voldaan door ieder stelsel waarden, dat door middel van eene lineaire betrekking uit die wortelstelsels kan worden afgeleid.*

Deze eigenschap wordt bewezen door het bedoelde stelsel waarden in de gegeven vergelijkingen te substitueeren.

§ 28. Vermenigvuldigt men de elementen van iedere kolom van den assemblant (1) achtereenvolgens met de grootheden $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_m$, en telt ze daarna op, dan verkrijgt men n lineaire homogene functiën tusschen de m veranderlijken $p_1, p_2, p_3, \ldots \ldots p_m$, welke gelijk aan nul gesteld de volgende n lineaire homogene vergelijkingen met m onbekenden opleveren:

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1 p_1 + a_1^2 p_2 + a_1^3 p_3 + \ldots . + a_1^m p_m = 0, \\ a_2^1 p_1 + a_2^2 p_2 + a_2^3 p_3 + \ldots . + a_2^m p_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 p_1 + a_n^2 p_2 + a_n^3 p_3 + \ldots . + a_n^m p_m = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Wordt aan de vergelijkingen (9) voldaan door een wortelstelsel, dan vormen deze wortels de coëfficienten eener lineaire betrekking van afhankelijkheid, die tusschen de vergelijkingen (8) bestaat.

§ 29. De lineaire functiën, die de eerste leden der ver-

gelijkingen (8) vormen, zullen ter verkorting voorgesteld worden door:

$$\theta_k \equiv a_1^k x_1 + a_2^k x_2 + a_3^k x_3 + \ldots + a_n^k x_n \; (k \text{ van } 1 \text{ tot } m) \ldots (10),$$

en de eerste leden der vergelijkingen (9) door:

$$\xi_l \equiv a_l^1 p_1 + a_l^2 p_2 + a_l^3 p_3 + \ldots + a_l^m p_m \; (l \text{ van } 1 \text{ tot } n) \ldots (11).$$

Tusschen de functiën θ en ξ bestaat alsdan de betrekking:

$$p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_3\theta_3 + \ldots + p_m\theta_m \equiv x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + \ldots + x_n\xi_n \; (12).$$

§ 30. Er zijn nu drie gevallen te onderscheiden, naar gelang $m = n$, $m > n$ of $m < n$ is, terwijl het laatste geval, dat verreweg het belangrijkste is, weder in drieën gesplitst dient te worden, al naar dat de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten:

1. alle van nul verschillen,
2. eenige van nul verschillen, andere gelijk aan nul zijn,
3. alle gelijk aan nul zijn.

De bijzonderheden, die zich in elk dezer gevallen voordoen, zullen nu afzonderlijk worden beschouwd.

(*Wordt vervolgd.*)

Elementaire berekening van logarithmen

DOOR

Dr. N. QUINT (den Haag).

(*Vervolg van blz. 17*).

II. *De methode van Long.*

Ongeveer een eeuw later (1714) verscheen in de *Philosophical Transactions* XXIX: „*A new method for making logarithms and vice versa for finding the Number corresponding to a Logarithm given by help of the following table by Mr. John Long.*"

Het artikel begint met acht tabellen, welke hieronder afgedrukt zijn.

[1]) Log.	Nat. num.
0,9	7,943282347
0,8	6,309573445
0,7	5,011872336
0,6	3,981071706
0,5	3,162277660
0,4	2,511886432
0,3	1,995262315
0,2	1,584893193
0,1	1,258925412

[2]) Log.	Nat. num.
0,09	1,230268771
0,08	1,202264435
0,07	1,174897555
0,06	1,148153621
0,05	1,122018454
0,04	1,096478196
0,03	1,071519305
0,02	1,047128548
0,01	1,023292992

[3]) Log.	Nat. num.
0,009	1,020939484
0,008	1,018591388
0,007	1,016248694
0,006	1,013911316
0,005	1,011579454
0,004	1,009252886
0,003	1,006931669
0,002	1,004615794
0,001	1,002305238

[4]) Log.	Nat. num.
0,0009	1,002074475
8	1,001843766
7	1,001613109
6	1,001382506
„ 5	1,001151956
4	1,000921459
3	1,000691015
2	1,000460623
1	1,000230285

[5]) Log.	Nat. num.
0,00009	1,000207254
8	1,000184224
7	1,000161194
6	1,000138165
„ 5	1,000115136
4	1,000092106
3	1,000069080
2	1,000046052
1	1,000023026

[6]) Log.	Nat. num.
0,000009	1,000020724
8	1,000018421
7	1,000016118
6	1,000013816
„ 5	1,000011513
4	1,000009210
3	1,000006908
2	1,000004605
1	1,000002302

[7]) Log.	Nat. num.
0,0000009	1,000002072
8	1,000001842
7	1,000001611
6	1,000001381
„ 5	1,000001151
4	1,000000921
3	1,000000690
2	1,000000460
1	1,000000230

[8]) Log.	Nat. num
0,00000009	1,000000207
8	1,000000184
7	1,000000161
6	1,000000138
„ 5	1,000000115
4	1,000000092
3	1,000000069
2	1,000000046
1	1,000000024

Zij vormen een antilogarithmen-tafel van de logarithmen van 0,9 tot 0,00000001, welke in de eerste tabel met 0,1, in de tweede met 0,01 enz. afdalen en welke door tweede en vijfdemachtswortel-trekkingen verkregen zijn. Moet nu log 2 gevonden worden, dan is deze blijkens de eerste tabel grooter dan 0,3 en men kan dus stellen:

$$(1) \qquad 2 = 10^{0,3} \times A \text{ met } A = \frac{2}{1,995262315} = 1,002374497.$$

Blijkens de derde tabel kan men stellen:

$$(2) \qquad A = 10^{0,001} \times B \text{ met } B = \frac{A}{1,002305238} = 1,000069070.$$

Zoo is verder blijkens de vijfde tabel:

$$(3) \qquad B = 10^{0,00002} \times C \text{ met } C = \frac{B}{1,000046053} = 1,000023015.$$

De zesde tabel leert:

$$(4) \quad C = 10^{0,000009} \times D \text{ met } D = \frac{C}{1,000020724} = 1,000000219.$$

De zevende tabel geeft:

$$(5) \quad D = 10^{0,0000009} \times E \text{ met } E = \frac{D}{1,000002072} = 1,000000115.$$

Dit laatste quotient is nu blijkens de achtste tabel gelijk $10^{0,00000005}$ zoodat *Long* vindt $\log 2 = 0,30102995$ met een fout kleiner dan 0,00000001. Wordt deze methode gebruikt in latere werken, dan gaat men in den regel uit van de waarden van $\sqrt[2^n/10]{}$, die dus alleen door vierkantswortteltrekkingen gevonden kunnen worden. Bij *Callet* b.v. (*Tables portatives de logarithmes,* 1795, bl. 12) vindt men deze waarden tot $n = 60$ aanvankelijk tot in 22, later tot in 46 decimalen. De waarden van dezen wortel voor $n = 1$ en $n = 60$ nemen we hier op:

$$n = 1 \ldots . 3,162277660168379331998893544,$$
$$n = 60 \ldots . . 1,000000000000000001997174208125505270800 4083175.$$

Nu kan men met deze tabellen de logarithme van alle waarden tusschen 1 en 10 berekenen, waarmede dan tevens de logarithmen van alle getallen gevonden zijn.

Wil men b.v. $\log 1,1$ bepalen, dan blijkt uit de tabel, dat deze tusschen $\frac{1}{16}$ en $\frac{1}{32}$ gelegen is, want:

$$n = 4 \text{ geeft } 1,15478 \ldots .$$
$$n = 5 \quad \text{„} \quad 0,07460 \ldots .$$

zoodat dus

$$1,1 = 10^{\frac{1}{32}} \times a \text{ te stellen is.}$$

Deeling geeft nu $a = 1,023629 \ldots .$

In de tabel vindt men verder

$$n = 6 \ldots . 1,018151727 \ldots .$$
$$n = 7 \ldots . 1,036632928 \ldots .$$

zoodat dus

$$a = 10^{\frac{1}{128}} \times b.$$

Deeling geeft weder een waarde voor b, die tusschen $10^{\frac{1}{256}}$ en $10^{\frac{1}{512}}$ gelegen is, dus is

$$b = 10^{5\frac{1}{12}} \times c, \text{ waarin } c < 10^{5\frac{1}{12}}.$$

Op deze wijze voortgaande vindt men:

$$\log 1{,}1 = (\tfrac{1}{2})^5 + (\tfrac{1}{2})^7 + (\tfrac{1}{2})^9 + (\tfrac{1}{2})^{12} + (\tfrac{1}{2})^{13} + (\tfrac{1}{2})^{17} + (\tfrac{1}{2})^{19} + (\tfrac{1}{2})^{20} + (\tfrac{1}{2})^{22} + (\tfrac{1}{2})^{23} + (\tfrac{1}{2})^{30} + (\tfrac{1}{2})^{32} + q$$
$$\text{met } q < (\tfrac{1}{2})^{32} = 0{,}000000000232830.$$

Acht decimalen zullen nauwkeurig zijn als q verwaarloosd wordt; men vindt dan:

$$\log 1{,} = 10{,}04139268.$$

III. *De methode van Brook Taylor.*

Drie jaren na het artikel van *Long* verscheen in dezelfde *Philosophical Transactions* (Vol. XXX 1717) een verhandeling van *Brook Taylor*, secretaris der *Royal Society*, een wiskundige, door zijn reeks algemeen bekend. In dit artikel „*An Attempt towards the Improvement of the Method of Approximating in the Extraction of the Roots of Equations in Numbers*" komt op bl. 610 een paragraaf voor, geheeten „*A new Method of Computing Logarithms*", waarvan hier een overzicht volgt.

Om log 2 te vinden gaat hij uit van:

$$1{,}28 > 1 > 0{,}8, \text{ dus}$$
$$7 \log 2 - 2 > 0 > 3 \log 2 - 1,$$

welke ongelijkheden kortweg als $a > 1 > b$ en $A > 0 > B$ geschreven zullen worden en waarin dus $\log a = A$ is. Deze ongelijkheden voeren alvast het resultaat

(1) $$\tfrac{1}{3} > \log 2 > \tfrac{2}{7}.$$

Om nauwere grenzen te vinden neemt *Taylor* $1{,}28 \times 0{,}8 = 1{,}024 = c$, welks logarithme $A + B = C$ is.

Nu is weder:

$$\log 1{,}024 > \log 1 > \log 0{,}8$$
$$10 \log 2 - 3 > 0 > 3 \log 2 - 1, \text{ of}$$

(2) $$\tfrac{1}{3} > \log 2 > \tfrac{3}{10},$$

Nu kon *Taylor* gebruiken $1{,}024 \times 0{,}8$ om een macht van 2 te hebben, die weder dichter bij 1 was. Maar hij brengt een kleine bekorting aan door te vragen, welke macht van een dezer getallen genomen moet worden, opdat het product zoo dicht mogelijk bij 1 zij. Hij wil dus hebben

$$0{,}8 \times 1{,}024^n = 1, \text{ of bij benadering}$$

$$(1 - 0{,}2)(1 + n \times 0{,}024) = 1, \text{ of}$$
$$n = \frac{0{,}2}{0{,}024} = 9,$$

en gaat nu uit van

$$d = 1{,}024^9 \times 0{,}8 = 0{,}990352031429,$$

welks logarithme $D = 9\,C + B = 93 \log 2 - 28$ is. Dus volgt hieruit:

$$\log 2 < \frac{28}{93}.$$

Op deze wijze voortwerkende verkrijgt *Taylor* resultaten, die in de volgende tabel zijn samengevat:

Getal	Logarithme	Waarde voor log 2
$a = 1{,}28$	$A = 7 \log 2 - 2 > 0$	$\log 2 > 0{,}28$
$b = 0{,}8$	$B = 3 \log 2 - 1 < 0$	„ $< 0{,}33$
$c = ab = 1{,}024$	$C = 10 \log 2 - 3 > 0$	„ $> 0{,}30$
$d = bc^9 = 0{,}990352031429$	$D = 93 \log 2 - 28 < 0$	„ $< 0{,}30107$
$e = cd^2 = 1{,}004336277664$	$E = 196 \log 2 - 59 > 0$	„ $> 0{,}301020$
$f = de^2 = 0{,}998959536107$	$F = 485 \log 2 - 146 < 0$	„ $< 0{,}301039$
$g = ef^4 = 1{,}000162594165$	$G = 2136 \log 2 - 643 > 0$	„ $> 0{,}301029$

zoodat hiermede reeds gevonden is $\log 2 = 0{,}3010$. *Taylor* komt bij voortgezette bewerking tot het resultaat

$$\log 2 = 3{,}01029997.$$

Zooals *Taylor* zelf opmerkte, ware zijn methode nog meer te bekorten geweest door niet — in de eerste kolom — van één der gevonden getallen, maar van beiden een macht te nemen.

Wil men nu

$$(1 + x)^m (1 - y)^n = 1 \text{ hebben, dan}$$

moet bij nadering

$$mx = ny \text{ wezen.}$$

Past men dit toe op de getallen c en d, dan moet dus:

$$\frac{m}{n} = \frac{0{,}00965}{0{,}024} = \frac{201}{500}.$$

Stelde men nu:

$$1{,}024^{201} \times 0{,}99035^{500} = 1, \text{ dan is}$$
$$201\,C + 500\,D = 0, \text{ of}$$
$$48510 \log 2 = 14603\,; \text{ dus}$$
$$\log 2 = 0{,}3010307.$$

IV. *Gewijzigde methode van Brook Taylor.*

Let men er op, dat bij de vorige methode machten van 2 gezocht werden, die zoo dicht mogelijk bij 1 lagen, dan is het duidelijk, dat de volgende methodes in den grond der zaak met de besprokene overeenstemmen, hoewel zij, die hiermede het eerst optraden, zich niet bewust zijn geweest, dat zij volgelingen van *Taylor* waren.

a. De methode van *Abel Bürja.*

In „*Der Selbstlernende Algebrist oder Anweisung zur ganzen Rechenkunst*" (Berlin 1786) geeft deze schrijver een methode ter berekening van logarithmen met behulp van kettingbreuken, die tot dezelfde waarden voert als die van *Taylor.*

Om log 2 te vinden stelt hij

$$10 = 2^a,$$

waarin dus a tusschen 3 en 4 moet liggen en gelijk $3 + \frac{1}{b}$ gesteld kan worden, dus

$$10 = 8 \times 2^{\frac{1}{b}} \text{ of } 1{,}25^b = 2.$$

Berekening leert nu weder, dat b tusschen 3 en 4 ligt en zoo heeft men dus:

$$b = 3 + \frac{1}{c}, \text{ en zoo voortgaande}$$
$$c = 9 + \frac{1}{d},$$
$$d = 2 + \frac{1}{e},$$
$$e = 2 + \frac{1}{f},$$

wat voor log 2 de nadere breuken $^1/_3$, $^3/_{10}$, $^{28}/_{93}$, $^{59}/_{196}$, $^{145}/_{485}$, enz. geeft dezelfde, die ook reeds bij de methode van *Taylor* gevonden zijn.

b. De methode van *A. Schmidt.*

In de „*Naturwissenschaftliche Wochenschrift*" (1903, N⁰. 13) verscheen onlangs een elementaire methode, die zeer geschikt reeds bij den aanvang van het onderwijs in logarithmen gebruikt kan worden, daar alle berekingen, die noodig zijn, door de leerlingen zelven gemakkelijk kunnen verricht worden.

Hij ontwerpt tafels voor de machten van de priemgetallen en zoekt nu eenvoudige benaderde betrekkingen tusschen de logarithmen van twee getallen. Zoo is b.v.:

$$2^{16} = 65536, \qquad 2^{20} = 1048576,$$
$$3^{8} = 6561, \qquad 3^{21} = 10460353203.$$

Men heeft dus nagenoeg:

$$16 \log 2 = 8 \log 3 + 1,$$
$$20 \log 2 = 21 \log 3 - 4, \text{ waaruit volgt}$$
$$\log 2 = \frac{53}{176} = 0{,}301,$$
$$\log 3 = \frac{21}{44} = 0{,}477.$$

Stelt men zich hiermede tevreden, dan kan men voor andere priemgetallen spoedig genoeg benaderde waarden vinden, zooals de volgende voorbeelden doen zien:

$$7^4 = 2401 \text{ en } 2^3.3.10^2 = 2400.$$

Alzoo

$$\log 7 = \tfrac{1}{4}\{3 \log 2 + \log 3 + 2\} = 0{,}845.$$

$$17^3 = 4913 \text{ en } 10^2.7^2 = 4900.$$

Alzoo

$$\log 17 = \tfrac{1}{3}\{2 \log 7 + 2\} = 1{,}230.$$

$$23^4 = 279841 \text{ en } 2^2.7.10^4 = 280000.$$

Alzoo

$$\log 23 = \tfrac{1}{4}\{2 \log 2 + \log 7 + 4\} = 1{,}360.$$

$$11^5 = 161051 \text{ en } 7.23.10^3 = 161000.$$

Alzoo

$$\log 11 = \tfrac{1}{5}\{\log 7 + \log 23 + 3\} = 1{,}041.$$

$$13^8 = 2197 \text{ en } 2.11.10^2 = 2200.$$

Alzoo

$$\log 13 = \tfrac{1}{8}\{\log 2 + \log 11 + 2\} = 1{,}114.$$

$$19^4 = 130321 \text{ en } 13.10^4 = 130000.$$

Alzoo

$$\log 19 = \tfrac{1}{4}\{\log 13 + 4\} = 1{,}279.$$

Toch kan ook wel op deze wijze vastgesteld worden hoe groot de bereikte nauwkeurigheid is. Daar

$$2^{90} = 1237940039285380274899124224,$$
$$2^{100} = 1267650600228229401496703205376,$$

heeft men

$$2^{93} < 10^{28} \text{ en } 2^{196} > 10^{59},$$

$$\frac{59}{196} < \log 2 < \frac{28}{93}, \text{ of}$$

$$0{,}30102 < \log 2 < 0{,}30107,$$

zoodat de vier eerste decimalen voor log 2 vaststaan.

Zoo is ook

$$3^{21} > 10^{10} \text{ en } 3^{44} < 10^{21}, \text{ dus}$$
$$0{,}476 < \log 3 < 0{,}477.$$

$$7^{19} > 10^{16} \text{ en } 7^{13} < 10^{11}, \text{ dus}$$
$$0{,}842 < \log 7 < 0{,}846.$$

V. *De methodes van Schubert.*

Schubert, de bekende wiskundige uit *Hamburg*, heeft ook in den laatsten tijd de denkbeelden bepleit, die in den aanvang van dit artikel uiteengezet zijn en tevens methodes aangegeven, die z. i. bij het onderwijs besproken konden worden (*Zeitschrift fur Math. und Natuw. Unterricht*, 1903 bl. 496, 551, 1904 bl. 273, *Elementare Berechnung der Logarithmen*, Leipzig 1903 en *Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis I*, Leipzig 1905). Zijne eerste methode berust op de ontwikkeling van het binomium voor een geheelen positieven exponent en valt dus om die reden buiten het terrein onzer middelbare scholen.

Zijne tweede methode heeft ongetwijfeld allereenvoudigste grondslagen. Uit de waarden voor $(a+b)(a-b)$, $(a \pm b)^2$ en $(a \pm b)^4$ worden ongelijkheden afgeleid tusschen de logarithmen van 3, 4 en 5 op elkander volgende n.l.:

(1) $$\log x > \tfrac{1}{2} \log (x-1) + \tfrac{1}{2} \log (x+1),$$

(2) $$\log x < \log (x-1) + \tfrac{1}{3} \log (x+1) - \tfrac{1}{3} \log (x-2),$$

(3) $$\log x < \tfrac{2}{3} \log (x-1) + \tfrac{2}{3} \log (x+1) - \tfrac{1}{6} \log (x-2) - \tfrac{1}{6} \log (x+2),$$

waardoor dan met behulp van 13 ongelijkheden vier betrekkingen afgeleid werden, die dan weder grenzen voor log 2 en log 3 geven.

Belangstellende lezers verwijzen wij naar de genoemde artikelen. Wij laten deze verder onbesproken, daar het ons voorkomt, dat de behandelingswijze van *Schubert* in eenvoud en overzichtelijkheid achterstaat bij de methodes, die hier besproken zijn.

Uitbreiding van het theorema van Carnot voor den scheeven veelhoek,

DOOR

F. T. A. CEDEE (Delft).

Wanneer P_1, P_2, $P_3 \ldots . P_n$ punten zijn in de ruimte en we verbinden P_1 met P_2; P_2 met P_3 enz. en ten slotte P_n met P_1, dan is $P_1 P_2 P_3 \ldots . P_n$ een scheeve $n$hoek. Laten we nu uit alle hoekpunten loodlijnen neer op een willekeurig plat vlak en noemen we die loodlijnen $l_1, l_2 \ldots l_n$, terwijl we door $S_{1\,2}$ het snijpunt voorstellen van het vlak met $P_1 P_2$, dan bewijst de lezer gemakkelijk, dat $l_1 : l_2 = S_{1\,2} P_1 : S_{1\,2} P_2 = -(P_1 S_{1\,2} : S_{1\,2} P_2)$, zoo wij de loodlijnen aan verschillende zijden van het vlak verschillend teeken geven. Hieruit volgt, dat in een scheeven $n$hoek

$$\frac{S_{1\,2} P_1}{S_{1\,2} P_2} \times \frac{S_{2\,3} P_2}{S_{2\,3} P_3} \cdots\cdots \frac{S_{n\,1} P_n}{S_{n\,1} P_1} = \frac{l_1}{l_2} \times \frac{l_2}{l_3} \cdots \frac{l_n}{l_1} = 1,$$

en tevens, dat

$$P_1 S_{1\,2} \times P_2 S_{2\,3} \times P_3 S_{3\,4} \ldots P_n S_{n\,1} =$$
$$\pm S_{1\,2} P_2 \times S_{2\,3} P_3 \times S_{3\,4} P_4 \ldots S_{n\,1} P_1,$$

al naar gelang n even of oneven is.

Onder woorden gebracht luidt deze eigenschap:

Wanneer de zijden van een scheeven n hoek worden gesneden door een plat vlak, zijn de producten der niet-opeenvolgende segmenten gelijk zoo n even is en elkanders tegengestelde zoo n oneven is.

Zoo $P_1, P_2 \ldots . P_n$ in een plat vlak liggen en we het willekeurige vlak loodrecht op het vlak van den $n$hoek nemen, gaat deze eigenschap over in het theorema van Carnot, terwijl de loodlijnen in het gegeven bewijs, loodlijnen worden uit de hoekpunten op de transversaal neergelaten.

Op dezelfde wijze, als dit gebeurt bij het omgekeerde van de stelling van Menelaüs, zal de lezer nu ook gemakkelijk kunnen bewijzen:

Als vier punten op de zijden van een scheeven vierhoek zóó gelegen zijn, dat de producten der niet opeenvolgende segmenten gelijk zijn, dan liggen die punten in een plat vlak.

De epicycloide en de hypocycloide als omhullende van een veranderlijke cirkelkoorde,

DOOR

C. VAN SPAENDONCK

(Katwijk a/d Rijn).

Veronderstel dat twee punten zich met standvastige snelheden op een cirkelomtrek bewegen, waarvan de straal gelijk aan r is. Men kan zich de vraag stellen, welke kromme de verbindingslijn der twee punten omhult. De vraag wordt gemakkelijk beantwoord.

Immers neemt men het middelpunt van den cirkel als oorsprong en laat men de punten beginnen zich te bewegen in een punt A op de x-as, dan kan men na een zeker tijdsverloop de coördinaten van de punten voorstellen door $r \cos \theta$, $r \sin \theta$, en $r \cos m\theta$, $r \sin m\theta$.

De verbindingslijn nu van deze twee punten heeft tot vgl.:

$$x \cos \frac{m+1}{2} \theta + y \sin \frac{m+1}{2} \theta = r \cos \frac{m-1}{2} \theta.$$

De eerste afgeleide met betrekking tot θ wordt na deeling door $\frac{m+1}{2}$:

$$x \sin \frac{m+1}{2} \theta - y \cos \frac{m+1}{2} \theta = r \frac{m-1}{m+1} \sin \frac{m-1}{2} \theta.$$

Deze twee vergelijkingen zijn gelijkwaardig met het volgende stel:

$$x = \frac{r}{m+1} (m \cos \theta + \cos m \theta) \qquad \text{I.}$$

$$y = \frac{r}{m+1} (m \sin \theta + \sin m \theta) \qquad \text{II.}$$

Deze vergelijkingen nu stellen een epicycloide of een hypocycloide voor naar gelang m positief of negatief is; en wel kan men deze beide krommen voortbrengen door een cirkel wiens straal $= \frac{r}{m+1}$ te laten rollen op of in een anderen cirkel wiens straal $= r \frac{m-1}{m+1}$. Neemt men bijv.

een horloge, welks uur- en minuutwijzer even lang zijn en verbindt men de uiteinden dezer wijzers door een elastisch draadje, dan zal dit draadje na een tijdsverloop van twaalf uren een epicycloide omhuld hebben, met elf keerpunten, die beschreven kan worden door een punt op een cirkel met straal $\frac{a}{13}$, rollend in een anderen cirkel met straal $\frac{11}{13}a$, waarbij a de lengte der wijzers voorstelt.

De eliminatie van θ uit I en II zal niet steeds een transcendentale vergelijking opleveren. Immers indien m meetbaar is, dan zullen de punten, nadat ze den omtrek een eindig aantal malen doorloopen hebben, weer in het punt van uitgang samenkomen; de kromme is dus gesloten en van eindige afmetingen, en kan door een algebraïsche vergelijking voorgesteld worden. Is m daarentegen onmeetbaar, zoo verkrijgt men een transcendentale kromme. Het bijzondere geval dat $m = -2$ wil ik nog even bespreken.

De vergelijkingen I en II nemen dan den vorm aan:

$$x = r\,(2\cos\theta - \cos 2\theta)$$
$$y = r\,(2\sin\theta + \sin 2\theta),$$

twee vergelijkingen, die een hypocycloide met 3 keerpunten voorstellen.

Om θ te elimineeren kan men den volgenden weg inslaan. Vervang $\cos\theta$ door $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, en $\sin\theta$ door $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$; insgelijks voor $\cos 2\theta$ en $\sin 2\theta$. Stelt men dan $e^{i\theta} = z$, dan verkrijgt men twee vergelijkingen van den derden graad in z. Elimineert men uit deze twee vgl. beurtelings den constanten term en z^3, dan houdt men, wanneer men na eliminatie van den constanten term nog door z gedeeld heeft, twee vgl. van den tweeden graad in z over, namelijk:

$$(x + iy)\,z^2 + 2\,(x - iy)\,z - 3r = 0,$$

en

$$3r\,z^2 - 2\,(x + iy)\,z - (x - iy) = 0.$$

Elimineert men hieruit op de gewone wijze z, dan verkrijgt men:

$$(x^2 + y^2 - 9r^2)^2 =$$
$$\{2\,(x - iy)^2 + 6\,r\,(x + iy)\}\{2\,(x + iy)^2 + 6\,r\,(x - iy)\},$$

of $(x^2 + y^2)^2 + 8\,r\,x\,(x^2 - 3y^2) + 18\,r^2\,(x^2 + y^2) - 27\,r^4 = 0.$

In poolcoördinaten $\rho^4 + 8\,\rho^3\,r\cos 3\,\theta + 18\,r^2\,\rho^2 - 27r^4 = 0.$

Gelijk boven reeds is aangemerkt kan deze hypocycloide beschreven worden door een punt op een cirkel met straal r, dien men laat rollen in een cirkel met straal $3r$. Hiermede is echter niet gezegd dat de kromme nog niet op een andere manier kan ontstaan.

Dit blijkt inderdaad als men de twee vgl. III en IV in den klassieken vorm schrijft:

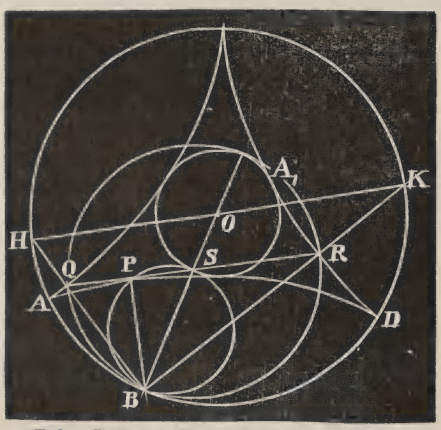
$$x = (a - c) \cos \theta - c \cos \frac{a - c}{c} \theta,$$

$$y = (a - c) \sin \theta + c \sin \frac{a - c}{c} \theta,$$

waarbij $a = 3r$, $c = r$ is.

Voor elke waarde van c zijn dit de vgl. van een hyp., ontstaan door de rolling van een cirkel van straal c in een anderen van straal a. Vervangt men nu c door $2c$, terwijl men voor θ, 2θ schrijft, dan krijgt men, na invoering der waarden voor a en c, juist de vgl. III en IV terug, behalve dat x het tegengestelde teeken verkregen heeft. Dit laatste echter heeft geen invloed op den vorm der kromme; dus hypocycloïden, ontstaan bij rolling van twee cirkels resp. met straal c en $2c$, zijn congruent.

Veronderstel nu dat beide rollende cirkels den vasten cirkel raken in A; zij A_1 het punt diametraal tegenovergesteld aan A op den grootsten der rollende cirkels. Laat nu beide cirkels zich voortbewegen tot B. Het punt A moge daarbij in Q, A_1 in R aangekomen zijn. Verbindt B met Q en R, en verleng deze verbindingslijnen tot waar zij den vasten cirkel snijden respectievelijk in H en K. De lijn HK is dan een middellijn en evenwijdig aan RQ. Immers BR : BK = BQ : BH = 2 : 3. De lijn BO zal QR middendoor deelen. Zij S het deelpunt, dan is SO = $\frac{1}{3}$ OB = c.



Zij verder P het punt waar de rollende cirkel met straal c de lijn QR snijdt. Boog BP = boog BQ, zoodat P

het punt is dat voor de wenteling tot P, in A was. P ligt dus op den boog AD. Nu staat BP loodrecht op de bewegingsrichting van het punt P, want B is het middelpunt van wenteling van den cirkel BPS. Dus BP is een normaal en daarom RQ een raaklijn aan de kromme. Ook zijn BQ en BR normalen aan de kromme en de raaklijnen in Q en R snijden elkaar op den cirkel, ingeschreven in de kromme.

Samenvattend heeft men dus de volgende resultaten:

1°. indien de raaklijn in P de kromme snijdt in Q en R dan is $QR = 4c$.

2°. QR wordt door den ingeschreven cirkel middendoor gedeeld.

3°. de raaklijnen in Q en R snijden elkaar op den ingeschreven cirkel.

4°. de normalen in Q en R snijden elkaar op den omgeschreven cirkel.

INDEELINGEN

DOOR

F. J. VAES (Rotterdam).

VOORWOORD.

Indertijd stelde Schr. zich de vraag of het niet mogelijk zou zijn de stangenvierhoeken (d. z. vierhoeken bestaande uit 4 stangen, door scharnieren verbonden), die zooveel verschillende vormen bezitten, te rangschikken in een tabel, zoodat ze door een volgnummer konden worden onderscheiden. Dit gaf aanleiding tot verschillende studies[1]), doch

---

[1]) De indeeling der stangenvierhoeken is besproken in:

1e. Indeeling en theorie der Stangenvierhoeken, (Jaarverslag der Vereen. van Werktuig- en Scheepbouwkundigen, Juli 1899);

2e. Ruimtediagrammen voor de indeeling der stangenvierhoeken, (Idem, Jan. 1900);

3e. Stangenvierhoeken op den bol (Weekblad „de Ingenieur" van 6 Oct. 1900);

4e. Indeeling van de stangenvierhoeken op den bol (Idem van 20 April 1901);

5e. De vergelijkingen voor de indeelingen van de stangenvierhoeken (Nieuw Archief voor Wiskunde, 2e reeks, 5e deel, Jan. 1902

de tabel werd eerst in behoorlijken vorm, en volledig, verkregen, toen een teekening was ontworpen, waarin elk punt een stangenvierhoek voorstelde.

Daardoor was een „Indeeling" verkregen van de stangenvierhoeken, welke ook uit een zuiver wiskundig oogpunt van belang is, omdat elke stangenvierhoek overeenkomt met een kromme van den derden graad, zoodat ook deze zijn „ingedeeld", terwijl men bovendien mag onderstellen, dat door het verder nagaan van het verband van vierhoeken en krommen bijzondere eigenschappen van beiden zullen kunnen worden gevonden.

In verloop van tijd bleek een „Indeeling" ook mogelijk te zijn voor verschillende kromme lijnen, waarvan de vorm afhangt van eenige parameters. Zijn er *twee* veranderlijke parameters, dan kan men volstaan met een teekening op twee coördinatenassen; zijn er *drie* dan moet men een ruimtevoorstelling te hulp nemen op drie coördinatenassen, of — wat beter is — werken met driehoekige coördinaten. Zijn er *vier* parameters, dan kunnen vierhoekige coördinaten worden gebruikt; bij meer parameters moet men een (of eenige) constant houden, tenzij men wil vervallen in abstracties omtrent meer-dimensionale ruimten. Uit een wiskundig oogpunt is de classificeering van verschillende vormen, die een kromme lijn kan aannemen, ongetwijfeld van nut. Schr. stelt de figuur voor zulk een indeeling ver boven een tabellarisch overzicht, omdat in een beknopte ruimte onmiddellijk de overgang blijkt van den eenen vorm in den anderen, en omdat men bovendien zeker is geen enkel type te vergeten, zooals bij eenig ander onderzoek gemakkelijk kan plaats hebben. Dit komt duidelijk uit bij de indeeling der ellipsconchoïden. In een daarover bestaande studie, was een der mogelijke vormen over het hoofd gezien; de indeelingsfiguur vertoonde een open plaats, waarin onmiddellijk de hoofdeigenschap van het niet vermelde type der kromme lijn kon worden geschreven, *zonder dat het noodig was,* dit type te teekenen of analytisch te onderzoeken.

Uiterst fraai vertoont zich *continuïteit* bij den overgang van den eenen vorm in den anderen. Wanneer bijv. nagegaan is, wanneer de (verlengde of verkorte) epicycloïde al of niet buigpunten, of dubbelpunten met lus bezit, dan wordt daardoor een kromme lijn verkregen, die ook geldigheid blijkt te bezitten voor hypo- en pericycloïde.

De samenstelling der figuren wordt eerst aangewezen bij een eenvoudig voorbeeld, nl. voor de verschillende vormen van driehoeken; vermoedelijk kan dit voor de vlakke meetkunde van nut worden.

Behalve op kromme lijnen heeft Schr. de methode ook toegepast op derde-, vierde- en vijfde-machtsvergelijkingen. Zeer zeker kan het gebied der toepassingen nog worden uitgebreid, doch daarvoor is medewerking van anderen noodzakelijk.

Op het 10e Ned. Natuur- en Geneeskundig Congres te Arnhem, April 1905, hield Schr. een voordracht onder den titel „Indeelingen", waarbij in het kort, en zonder figuren, de richting werd aangegeven van wat in het volgende verder is uitgewerkt.

§ 1. DRIEHOEK.

1. Wat met een „Indeeling" bedoeld wordt, kan worden duidelijk gemaakt door een eenvoudig voorbeeld.

Noem van een driehoek de zijden x, y en z. Onderstel dat z de grootste is, en een constante waarde heeft. Geeft men dan aan x en y verschillende waarden, dan bepalen die op twee onderling loodrechte coördinatenassen OA en OB (fig. 1) telkens een punt, dat dus een driehoek vertegenwoordigt. Is $OA = OB = z$ genomen, dan kan x niet grooter dan OA, en y niet grooter dan OB zijn, zoodat de verschillende punten liggen binnen vierkant OACB; en omdat $x + y$ grooter dan z moet zijn, kunnen ze niet buiten $\triangle$ ABC vallen.

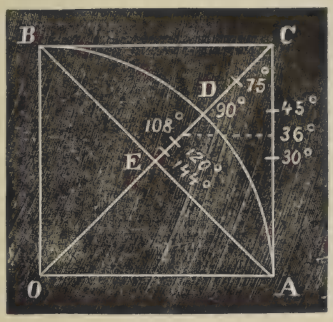


Fig. 1.

Kiest men een punt op den uit O beschreven kwartcirkel AB, dan is daarvoor

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

zoodat zulk een punt een *rechthoekigen* driehoek vertegenwoordigt, en wel juist den driehoek, die gevormd wordt door de beide coördinaten en den voerstraal uit O.

Voor punten van segment AB is

$$x^2 + y^2 < z^2,$$

zoodat de punten *stomphoekige* driehoeken vertegenwoordigen. Voor punten van de figuur tusschen AC, CB en boog AB is $x^2 + y^2 > z^2$,

dus geven die *scherphoekige* driehoeken aan.

Voor punten van O C is $y = x$, zoodat deze *gelijkbeenige* driehoeken aanduiden, evenals de punten van AC en BC, waarvoor $x = z$ resp. $y = z$. Het snijpunt D van OC met den boog stelt den *rechthoekigen gelijkbeenigen* driehoek voor, tusschen D en E (E is snijpunt van OC en AB) vindt men stomphoekige, tusschen D en C scherphoekige gelijkbeenige driehoeken. Het punt C vertegenwoordigt den *gelijkzijdigen* driehoek.

Omdat men steeds $x > y$ kan onderstellen, kan men volstaan met de helft O ACDE van de figuur.

2. In de verkregen figuur, die men de *indeelingsfiguur* of het *indeelingsdiagram* kan noemen, kan men punten verbinden, die driehoeken voorstellen, welke eenzelfde eigenschap bezitten, bijv. driehoeken met even groot oppervlak, of met eenzelfden hoek tegenover de zijde z; enz.

Driehoeken met gelijken omtrek geven lijnen // AE.

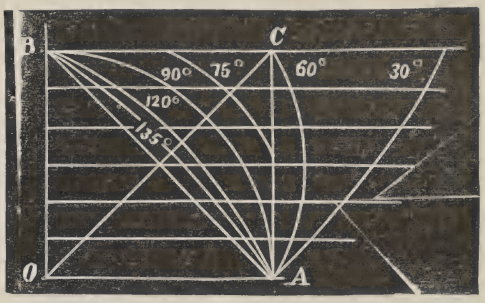


Fig. 2.

Driehoeken met gegeven hoek tegenover de zijde z, of met gelijk oppervlak geven kromme lijnen, die het gemakkelijkst te vinden zijn door eenige punten er van te construeeren. Men neme daartoe in een afzonderlijke figuur op een lijn $O_1 A_1$ stukken $y = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ trekke daaruit cirkels met straal z, en door O_1 lijnen, die hoeken van verschillende grootte ($22^1/_2{}^\circ$, 45°, 30° enz.) met $O_1 A_1$ maken, of wel lijnen evenwijdig met $O_1 A_1$ op afstanden 1, 2, 3 enz. Onmiddelijk vindt men dan waarden van x, die in de eerste figuur kunnen worden overgebracht.

Door berekening vindt men uit:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

een stel ellipsen met O als middelpunt, en een der assen langs OC, en alle gaande door de punten A en B.

In fig. 2 zijn lijnen geteekend, waarop punten liggen, die driehoeken vertegenwoordigen met een hoek van 135°, 120°, 75°, 60°, 30° tegenover de zijde z. Voor de lijn AB is die hoek 180°. De lijn voor 60° heeft slechts het punt C met het diagram gemeen, voor hoeken kleiner dan 60° liggen de kromme lijnen buiten de figuur, zooals uit die voor 30° blijkt. Om een hoek van 30° tegenover z te verkrijgen, moet x noodzakelijk grooter dan z zijn.

Fig. 3 geeft lijnen, waarop punten liggen, die driehoeken aanduiden met gelijk oppervlak. Voor de lijnen 1, 2, 3, 4, 5 is het oppervlak der bijbehoorende driehoeken evenzooveel twaalfden van z^2. De lijn 1 is ook buiten het diagram voortgezet.

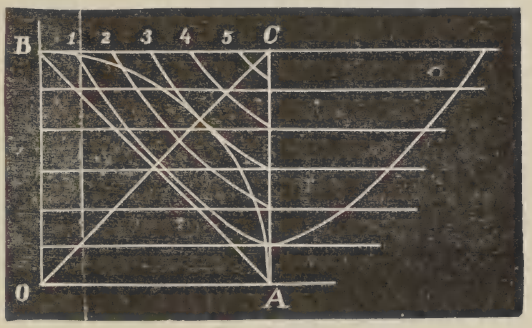


Fig. 3.

3. In elk punt van de indeelingsfiguur kan men op het vlak van teekening een loodlijn getrokken denken, en daarop afgezet grootheden als: inhoud van den driehoek, die door het punt vertegenwoordigd wordt, den omtrek, een goniometrische functie van een der hoeken, enz. De kromme lijnen in fig. 2 en 3 zijn blijkbaar doorsneden van de gevonden oppervlakken met vlakken evenwijdig van het vlak van teekening.

Enkele bijzondere driehoeken kunnen gemakkelijk worden aangeduid, bijv. de rechthoekige driehoek met hoek van 30°, de gelijkbeenige met tophoek van 108°, en die met tophoek van 36°; enz. (Zie figuur 1.)

De beide laatstvermelde punten liggen resp. op OC en AC evenver van de x-as.

4. De indeelingsfiguur is asymmetrisch, doordien de zijde z bevoorrecht is boven de beide andere.

Symmetrie wordt verkregen door x, y en z aan te geven door de afstanden van een punt tot de zijden van een gelijkzijdigen driehoek ABC (fig. 4).

Men werkt dan met *driehoekige* (*trilineaire*) *coördinaten*, en heeft daarbij slechts te doen met de *verhouding* van x, y en z.

Bekend is, dat $x + y + z =$ de hoogtelijn a van den coördinaten-driehoek, dus constant, zoodat stilzwijgend ondersteld wordt, dat de omtrek van den veranderlijken driehoek onveranderd blijft.

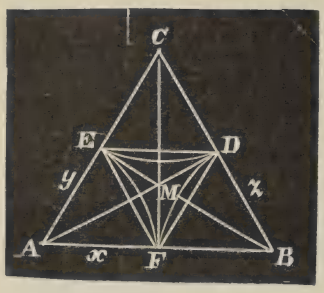


Fig. 4.

In plaats van de ligging van een punt aantegeven door de verhouding van de loodlijnen op de zijden van den driehoek neergelaten kan men ook de verhouding nemen van lijnen in vooraf bepaalde richtingen naar die zijden getrokken. Dit is echter minder gemakkelijk.

Als men x, y en z loodrecht op de zijden AB, AC en BC neemt, dan liggen op de hoogtelijnen AD, BE en CF de punten, waarvoor $x = y$, $x = z$, en $y = z$, terwijl voor

DE, EF, en FD

$y + z = x$, $x + y = z$, en $x + z = y$ is.

Buiten $\triangle$ DEF liggen dus geen punten, welke driehoeken vertegenwoordigen.

Voor rechthoekige driehoeken is $x^2 + y^2 = z^2$, of

$$x^2 + y^2 = (a - x - y)^2,$$

$$2xy - 2a(x + y) + a^2 = 0$$

zijnde een hyperbool met A M als as, gaande door E en F, en daar rakend aan BE en CF.

Voor $x^2 + z^2 = y^2$ en $y^2 + z^2 = x^2$, vindt men eveneens hyperbolen.

Binnen den driehoek, gevormd door de 3 hyperbooltakken liggen punten, die scherphoekige driehoeken, daarbuiten die, welke stomphoekige driehoeken vertegenwoordigen.

M stelt den gelijkzijdigen driehoek voor.

Omdat men x, y en z onderling kan verwisselen, is het voldoende een der drie driehoeken MDE, MEF, MFD te beschouwen.

5. Het is een bekend verschijnsel, dat men bij het teekenen van een driehoek, licht een verkrijgt, die tennaastenbij gelijkbeenig of rechthoekig is.

De vraag kan daarom gesteld worden, welke driehoek het meest afwijkt van den gelijkbeenigen en den rechthoekigen.

Men zou daarvoor kunnen kiezen het zwaartepunt of wel het middelpunt van den ingeschreven cirkel van elk der figuren ADC en ADE (fig. 1).

6. Men kan aan x, y en z alle mogelijke waarden geven, en die uitzetten op een rechthoekig coördinatenstelsel in de ruimte. De vlakken $x + y = z$, $x + z = y$, $y + z = x$ begrenzen de ruimte, waarin punten liggen, die driehoeken vertegenwoordigen. Daarbinnen vallen gedeelten van de vlakken $x = y$, $y = z$, $z = x$, en van de elkander rakende kegels $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = x^2$, $z^2 + x^2 = y^2$. Fig. 1 is een doorsnede van dit ruimtediagram met een vlak $z =$ constant, de doorsnede met twee der kegels vallen buiten het beschouwde gebied.

Fig. 4 is eveneens een doorsnede van het ruimtediagram, en wel met een vlak $x + y + z =$ constant.

Men zou ook een doorsnede kunnen denken met een bol $x^2 + y^2 + z^2 =$ constant, ($\triangle$ DEF van fig. 4 wordt dan een boldriehoek met zijden van 60°, de hyperbolen worden kleine cirkels), of met eenig ander oppervlak.

§ 2. PARALLELOGRAM.

7. De indeelingsfiguur voor parallelogrammen is nog eenvoudiger dan die voor driehoeken: Zet op de x-as stukken uit, die de verhouding der zijden aangeven, en op de y-as stukken evenredig met den ingesloten hoek, dan behoeft men slechts den rechthoek te beschouwen, ingesloten door de assen en de lijnen $x = 1$, $y = 90°$ Op de lijn $x = 1$ liggen punten, die ruiten voorstellen, op de lijn $y = 90°$ die voor rechthoeken. Hun snijpunt duidt het vierkant aan.

§ 3. HET TEEKENEN MET DRIEHOEKIGE COÖRDINATEN.

8. Wanneer de kromme lijnen in fig. 2 of 3 moeten worden overgebracht in een driehoekig stelsel, dan is de gemakkelijkste wijze van overbrenging deze:

Maak (fig. 5) CD (in 't verlengde van de zijde z aan den kant van zijde y) gelijk aan de y van het over te brengen punt, trek CE // AD, dan is voor alle punten van de lijn CE de verhouding der loodlijnen op y en z-as gelijk aan de verhouding van AE tot EB, dus ook aan die van y en z.

Maak BF (in 't verlengde van de zijde z aan den kant van de zijde x) gelijk aan de x van het over te brengen

punt, trek BG // AF, dan is voor alle punten van de lijn BG de verhouding der loodlijnen op x en z-as gelijk aan die van AG en GC, dus ook aan die van x en z.

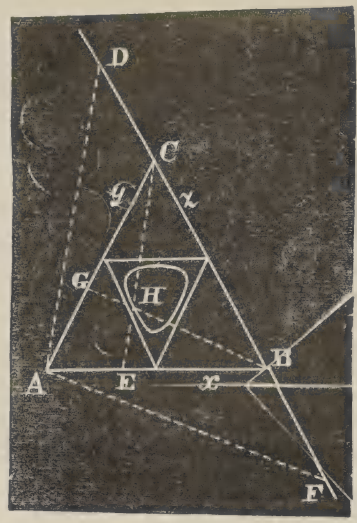


Fig. 5.

Het snijpunt H is het gezochte punt. De kromme lijn 1 uit fig. 3 is op deze wijze in fig. 5 overgebracht. Worden de waarden van y te groot ten opzichte van z, zoodat het punt D buiten de teekening zou vallen, dan keert men de verhouding om. In plaats van dus bijv. $y = 5\,z$ te nemen, schrijve men $z = \frac{1}{5}\,y$, en zette op 't verlengde van zijde y aan den kant van zijde z een stuk uit $\frac{1}{5}\,y$, enz.

Heeft men slechts enkele lijnen CE noodig, dan kan men het punt E door berekening vinden door op te merken, dat als $y = \frac{1}{n}\,z$ is, ook $AE = \frac{1}{n}\,EB$, dus $AE = \frac{n}{n+1} \times AB$ moet zijn.

§ 4. LIMAÇON VAN PASCAL, CIRKELCONCHOïDE.

9. Wanneer men van uit een punt B voerstralen trekt naar een cirkel (middelpunt A, straal a), en van af de snijpunten stukken op de voerstralen afzet van gegeven lengte c, dan ontstaat de limaçon van Pascal. Gewoonlijk denkt men B op den cirkel omtrek (fig. 6); men verkrijgt echter een meer algemeenen vorm door B willekeurig te nemen. Het is beter om dan niet meer van limaçon (slakkenlijn) maar van conchoïde (schelplijn) te spreken.

$b = a$
Fig. 6.

Stelt men den afstand AB voor door b, dan kan dus $b =$, $<$ of $>$ a zijn.

Men kan a een constante waarde geven, en b en c als veranderlijken op een x en y-as uit- zetten (fig. 7).

Ter bekorting zal in het volgende telkens gezegd worden: dat een lijn of een vlak een vorm of een eigenschap van de kromme lijn geeft, in plaats van het meer omslachtige, dat de punten van de lijn of het vlak kromme lijnen vertegenwoordigen van dien vorm of met die eigenschap.

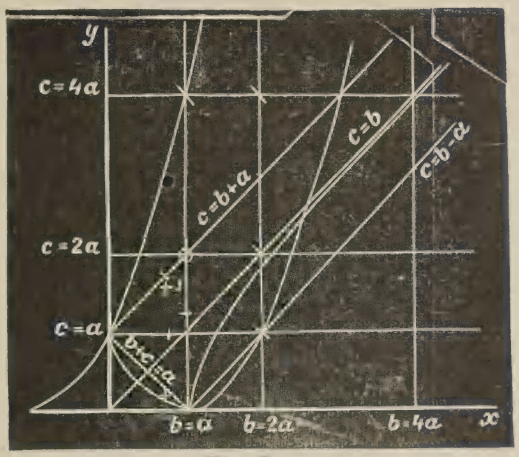


Fig. 7.

Een onderzoek levert nu het volgende op: I. De x-as geeft altijd den gegeven cirkel a (omdat dan $c = 0$ is); de y-as steeds twee cirkels concentrisch met a (omdat dan B in A valt), en wel van $c = 0$ tot $c = a$ beide met pos. straal; vanaf $c = a$ een met neg. straal. Voor $c = a$ is een der cirkels een punt, voor $c = 2a$ valt een der cirkels samen met cirkel a.

$b < a, c < b, b + c < a.$
Fig. 8. [1])

II. De lijnen $c = a$ en $c = 2a$ zijn getrokken; de 1e geeft krommen, die door A gaan, de 2e krommen, die door een of door beide snijpunten van AB met cirkel a loopen.

De grootte van b is in beide gevallen zonder invloed, omdat de bijzonderheid optreedt, wanneer de voerstraal uit B langs de lijn BA valt.

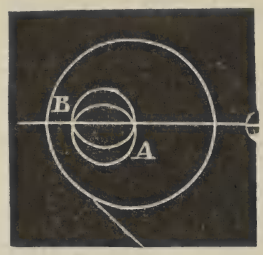
III. De lijn $b = a$ geeft de meer bekende vormen (fig. 6): van $c = 0$ tot $c = 2a$ een dubbelpunt met lus (die voor $c = a$ door A gaat), voor $c = 2a$ een keerpunt, van $c = 2a$ tot $c = 4a$ twee buigpunten; van $c = 0$ tot $4a$ een dubbelraaklijn. Voor $c = 4a$ vallen de beide buigpunten samen op de lijn AB. Voor $c > 4a$ zijn er geen bijzondere punten.

---

[1]) De streepjes in fig. 7 geven punten aan overeenkomend met de geteekende kromme lijnen fig. 8—16.

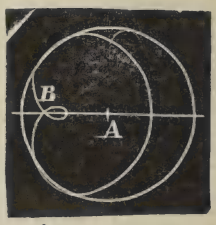
(Dat de buigpunten werkelijk voor de genoemde waarde $c = 4\,a$ tot elkander genaderd zijn, wordt eenige bladzijden verder aangetoond).

IV. Is $b < a$, dus ligt B binnen den cirkel, dan bestaat de kromme uit twee deelen, waarvan het eene binnen het andere ligt. Want door de waarde c op de voerstalen naar buiten af te zetten verkrijgt men een gesloten kromme (die geheel ligt binnen den cirkel uit A beschreven met straal $a + c$), terwijl door c naar binnen uit te zetten eveneens een gesloten kromme ontstaat, die nimmer een punt met de eerste kan gemeen hebben. Immers is de afstand van een punt van een der krommen tot het naastbijgelegen punt van de andere, op denzelfden voerstraal uit B, gelijk aan de koorde, welke door den cirkel van dien voerstraal wordt afgesneden. Dit blijkt onmiddellijk, wanneer men op een voerstraal de vier daarop gelegen punten aangeeft. De kleinste afstand ligt op den voerstraal, die in B loodrecht op AB staat, omdat daarop de kleinste koorde ligt. In fig. 8, 9, 10 en 11 zijn eenige vormen aangegeven; daarvan is slechts het binnenste deel geteekend.



$b < a$, $c = a$.
Fig 9.

Naarmate men B dichter bij den cirkelomtrek neemt, wordt de bedoelde afstand kleiner; voor $b = a$ is die afstand nul, dus gaan de beide deelen in elkander over, en vormen één doorloopend geheel (fig. 6). Voor $b > a$ zijn er weder twee deelen, die niet binnen elkander liggen. Fig. 12, 13, 14 en 15 geven eenige vormen.



$b < a$, $c > a$,
$c < a + b$.
Fig. 10.

De limaçons in fig. 6 zijn dus overgangsvormen tusschen de krommen, waarbij $b < a$ en $b > a$ is. De lijn $b = a$ is dus een belangrijke lijn voor het indeelingsdiagram (fig. 7).

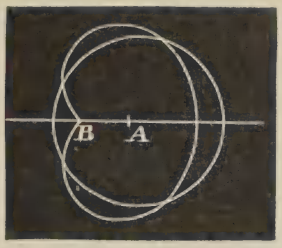
Voor $c = 2a$ raken beide krommen den cirkel; voor $c < 2a$ snijden beide den cirkel; voor $c > 2a$ liggen ze er geheel buiten.

Gemakshalve zal voortaan het gedeelte van de kromme, dat het dichtst bij B ligt den 1en tak genoemd worden; het andere deel den 2en tak.

V. Als $c = b - a$ (fig. 13) dan is er altijd een keerpunt in B, want als de voerstraal langs BA valt, dan komt het punt, dat de limaçon beschrijft, juist in B; en bij het verder draaien van den voerstraal beweegt het punt een oogenblik in de richting van B naar A.

Het duidelijkst ziet men dit wanneer men een stangenstelsel denkt, waarvan één stang draait om het punt A, terwijl een tweede stang scharnierend aan het uiteinde van de eerste verbonden is, en voortdurend door het punt B schuift (dit mechanisme treft men aan bij machines met oscilleerenden cilinder).

De limaçons worden beschreven door punten van de tweede stang, die koppelstang heet, en zijn dus zoogenaamde *koppelkrommen*.

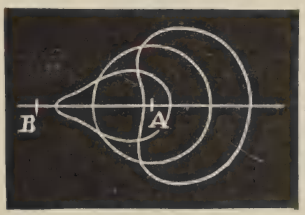


$b < a$, $c = a + b$.
Fig. 11.

Ook kan men letten op de ligging van het oogenblikkelijk draaiïngsmiddelpunt, of pool. Deze is het snijpunt van de eerste stang met de loodlijn in B op de tweede stang getrokken.

Is $c = b - a$, en ligt de tweede stang langs BA, dan valt de pool in B, en wordt dus een keerpunt verkregen.

In fig. 7 is $c = b - a$ een lijn door het punt $b = a$, $c = 0$, onder 45° met de x-as. Is c iets $< b - a$, dan heeft de kromme lijn zich van het punt B teruggetrokken; zij heeft dan buigpunten (fig. 12) in de nabijheid van B. Bij kleiner worden van c verdwijnen ze. Is $c > b - a$, dan gaat het bewegende punt tweemaal door B heen; de kromme heeft bijgevolg lussen aan beide zijden van de loodlijn in B op AB. Voor $c = b$ zijn de lussen even lang, in de richting AB (fig. 14).



$b = 2a$, $c < a$.
Fig. 12.

In fig. 7 scheidt de lijn $c = b - a$ dus twee gebieden nl.: van de krommen, die al of niet een dubbelpunt met lus bezitten.

Vanzelf is hierbij b grooter dan a gedacht.

$c = b + a$ geeft opnieuw een keerpunt in B (fig. 11 en 15) aan de negatieve zijde der loodlijn, (A is aan de positieve zijde gedacht).

Hierbij kan B binnen of buiten den cirkel liggen, zooals

ook in fig. 7 blijkt, waar de lijn $c = b + a$ ter weerszijden van de lijn $b = a$ loopt. De lijn $c = b$ in fig. 7 geeft geen bijzonderheden.

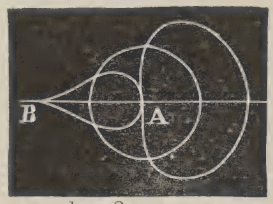
Is c iets $> b + a$, dan ontstaan krommen met buigpunten.

$b + c = a$ (dus B binnen den cirkel) geeft eveneens een keerpunt.

In fig. 7 geeft dit een lijn door de punten $b = a$, $c = 0$; $c = a$, $b = 0$.

$b + c$ iets $> a$ geeft een lus.

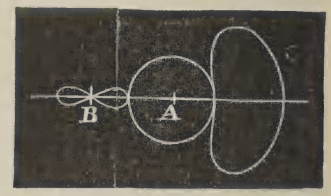
$b + c$ „ $< a$ „ buigpunten. (fig. 8).



$b = 2a$, $c = a$
Fig. 13.

Op de drie lijnen $\pm c = \pm a \pm b$ in fig. 7 liggen limacons met keerpunten. Binnen de strook, die zij insluiten, liggen krommen met dubbelpunt en lus; buiten die strook kromme lijnen zonder dubbelpunt of lus (gedeeltelijk met buigpunten).

VI. De grootste helling, die de voerstraal hebben kan, is die van de raaklijn uit B aan den cirkel. Neemt men $c =$ de lengte van die raaklijn, dus $\sqrt{b^2 - a^2}$, dan verkrijgt men een kromme lijn met 2 lussen (eenigszins in den vorm van fig. 14, doch de lussen in 't algemeen ongelijk van lengte in de richting AB).



$b = 2a$, $c = 2a$
Fig. 14.

Stelt men zich weder aan het mechanisme voor, dat in V genoemd is, dan ziet men, dat het bewegende punt door B gaat, op het oogenblik, dat de stang in haar eigen richting verschuift, want het eene uiteinde beweegt volgens de raaklijn aan den cirkel, dat is juist in de richting van de tweede stang (en de pool ligt in het oneindige). Bijgevolg is er een buigpunt in B, zoowel bij den heen- als bij den teruggang.

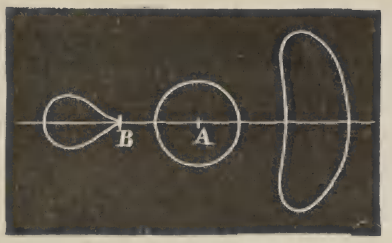
Is c iets kleiner dan de aangegeven waarde, dan zijn er buigpunten tusschen B en A; is c iets grooter, dan komen ze links van de in B op AB getrokken loodlijn.

In fig. 7 is de kromme

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad \text{of} \quad b^2 - c^2 = a^2$$

geteekend. Deze hyperbool geeft de grens aan van de krommen, die in de nabijheid van B buigpunten hebben

aan de eene of aan de andere zijde van de loodlijn in B op AB. Zij raakt de lijn $b = a$, en is asymptoot aan de lijn $c = b$.

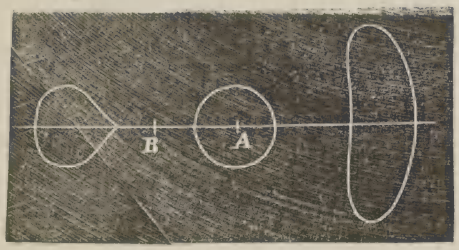


$b = 2a$, $c = 3a$
Fig. 15.

VII. In III is vermeld, dat $b = a$, $c = 4a$ twee samenvallende buigpunten heeft (buitenste lijn in fig. 6). Men kan dit in 't algemeen nagaan voor $b >$ of $< a$ door te onderzoeken, wanneer er een dubbelraaklijn is, en wanneer niet.

1e. Eerste tak. $b > a$ (fig. 17).

Zij C het snijpunt van den voerstraal BC met cirkel a, dan bepalen CA en de loodlijn BP op BC het oogenblikkelijk draaiïngsmiddelpunt P. Trekt men PD // AB tot ze CB snijdt, dan heeft de door D beschreven limaçon een raaklijn in D $\perp$ AB, d. w. z. een dubbelraaklijn.



$b = 2a$, $c = 4a$
Fig. 16.

(In de Wiskundige Opgaven van het Wiskundig Genootschap gaf Schr. een constructie voor de dubbelraaklijn van de limaçons van fig. 6 op de hier aangegeven wijze; bij die limaçons is voor het dubbelpunt BD = BC.)

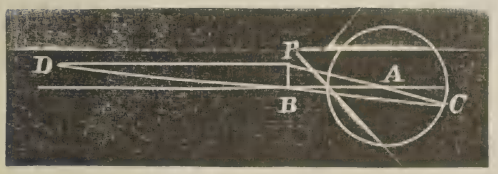


Fig. 17.

Tusschen de beide raakpunten liggen buigpunten, of een keerpunt, of een lus. Om te weten, wanneer de buigpunten verdwijnen moet men C oneindig dicht bij AB brengen, want dan komt D ook oneindig dicht bij AB, en elk der buigpunten eveneens. Nu is steeds CD : CB = CP : CA, en bij de limiet wordt CB = $a + b$, en CP = $a + b$, zoodat

$$c : (a + b) = (a + b) : a$$

of $$c = \frac{(a+b)^2}{a},$$

gevende (in fig. 7) een parabool $(a+b)^2 = ac$, met top $c = 0$, $b = -a$, en gaande door het punt $b = 0$, $c = 4a$.

Fig. 18. Fig. 19.

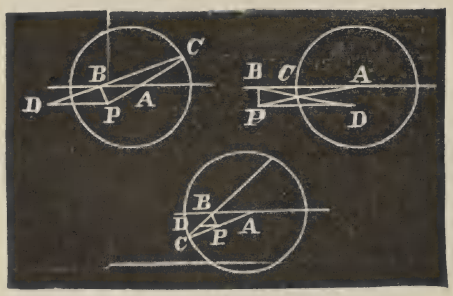


Fig. 20.

2e. Tweede tak. $b > a$ (fig. 19).

De evenredigheid wordt bij de limiet

$$c : (b-a) = (b-a) : a,$$

gevende een parabool

$$(b-a)^2 : ac,$$

met top $c = 0$, $b = a$, en geheel gelijk aan de voorgaande, doch evenwijdig verschoven.

3e. Eerste tak. $b < a$ (fig. 20).

De evenredigheid wordt bij de limiet

$$b : (a-b) = (a-b) : a$$

gevende een parabool $(a-b)^2 = ac$, dezelfde als bij 2e, of liever de andere helft ervan.

4e. Tweede tak. $b < a$ (fig. 18).

$$c : (b+a) = (b+a) : a$$

gevende een gedeelte van de parabool sub. 1e.

10. Men kan verder gaan, en de meetkundige plaatsen teekenen van de punten, voor welke de sub. V genoemde buigpunten twee aan twee samenvallen of verdwijnen, of waar andere bijzonderheden optreden.

Het zal bij verdere studie waarschijnlijk gemak opleveren te spreken van een primaire, secundaire enz. verdeeling.

De primaire zou dan bestaan uit de grofste verdeeling, nl. de lijnen $b = a$, $b = 2a$, $c = a$, $c = 2a$, en $c = b$;

de secundaire uit de lijnen $\pm c = \pm b \pm a$,

de tertiaire uit de parabool en de hyperbool. Enz.

In fig. 7 zijn twee kruisjes geteekend. Het bovenste vertegenwoordigt een kromme lijn, die de volgende eigenschappen heeft:

Volgens de primaire verdeeling ligt b binnen den cirkel, is $2a > c > a$, en bestaat de kromme uit twee deelen, waarvan het eene binnen het andere ligt.

Volgens de secundaire verdeeling is $c < b + a$. De 1e tak heeft bijgevolg geen lus, en kan buigpunten hebben.

Doordien het punt tusschen de beide parabolen ligt (tertiaire verdeeling) is er een dubbelraaklijn loodrecht op de lijn AB, zoodat er werkelijk buigpunten zijn.

De kromme is van den vorm van fig. 10.

Het onderste kruisje vertegenwoordigt een kromme, voor welke $c < a$ is, en die uit twee deelen bestaat, welke binnen elkander liggen.

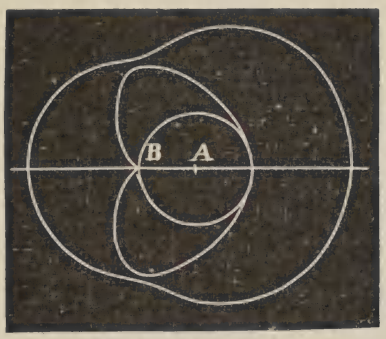
Volgens de secundaire verdeeling is $b + c < a$. De kromme is dus van den vorm van fig. 8.

Doordien het punt nog tusschen de beide parabolen ligt, is er een dubbelraaklijn loodrecht op AB, d. w. z. zijn er buigpunten.

Het cirkeltje geeft de limaçon aan met keerpunt op cirkel A.

11. Een nadere beschouwing van fig. 7 leidt vanzelf tot verdere bestudeering van de limaçons.

Teekent men alleen de lijn $b = a$, dan liggen (zooals boven vermeld is) in de strook tusschen die lijn en de c-as kromme lijnen, waarvan het eene deel binnen het andere ligt; op de lijn $b = a$ liggen krommen, die uit één doorloopend geheel bestaan; rechts van de lijn liggen krommen, waarvan de beide deelen elkander snijden of raken, of geheel buiten elkander liggen.



$b = a - \triangle$, $c = 2a$
Fig. 21.

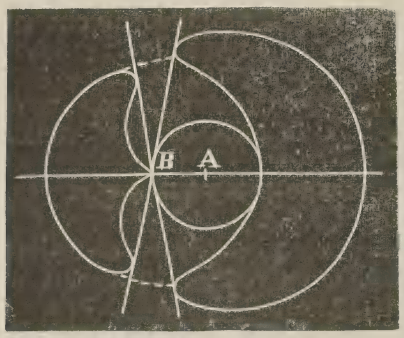
Het is van zeer veel belang den overgang waartenemen van de eerste groep tot de laatste; daarbij komt een belangrijke bijzonderheid aan het licht.

In fig. 21 en 23, 20 en 24 zijn daarom kromme lijnen geteekend met $b = a - \triangle$, en $b = a + \triangle$, waarbij $\triangle$ een zeer kleine grootheid voorstelt.

In fig. 22 en 24 hebben beide takken een gedeelte, dat zeer weinig afwijkt van een cirkel met straal c beschreven uit B; immers de snijpunten van de voerstralen uit B met cirkel A liggen voor een gedeelte opeengehoopt in de nabijheid van B. In de scherpe hoeken, gevormd door de beide raaklijnen, die uit B aan cirkel A kunnen

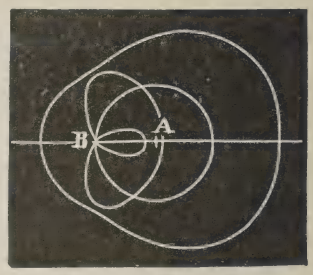
worden getrokken, liggen geen punten van de kromme lijn.

Naarmate men $\triangle$ kleiner denkt, worden die hoeken kleiner, en op het oogenblik dat $\triangle$ nul is, loopen de beide takken in elkander over met dien verstande, dat de deelen der beide takken, welke weinig van cirkelbogen afwijken, te zamen een cirkel met straal c gaan vormen, en de overige deelen de limaçon $b = a$, $c = 2a$ samenstellen.



$b = a + \triangle$, $c = 2a$
Fig. 22.

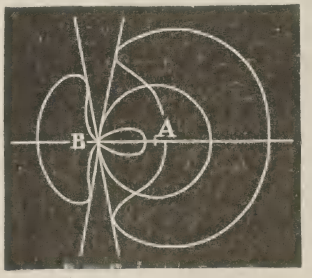
Brengt men B binnen den cirkel A (fig. 21 en 23), dan hebben beide krommen weder twee deelen, die weinig van een cirkel afwijken (nl. twee punten op de lijn AB waar de osculatiecirkel c tot straal heeft), en wel is nu de cirkelboog van den 1en tak deel gaan uitmaken van den 2en, en omgekeerd.



$b = a - \triangle$, $c < a$
Fig. 23.

Blijkbaar maakt de cirkel een gedeelte uit van de limaçon, dat niet mag worden over het hoofd gezien.

12. In fig. 22 ziet men, dat behalve de dubbelraaklijn, die voortdurend bovenbedoeld is, nog een andere dubbelraaklijn optreedt, die den 1en tak raakt nabij de punten, waar de raaklijnen door B dien tak raken.



$b = a + \triangle$, $c < a$
Fig. 24.

In fig 24 valt deze dubbelraaklijn bijna samen met de andere. Wordt c kleiner genomen dan in die figuur gedaan is, dan heeft de 1e tak slechts één of geen enkele dubbelraaklijn. Om de betrekking tusschen b en c te vinden, waarbij de twee dubbelraaklijnen samenvallen, zal waarschijnlijk een analytische berekening noodig zijn.

Voorloopig blijft deze achterwege.

13. Het is van belang ook te letten op de uiterste grenzen van het indeelingsdiagram. De lijn $b = \infty$ geeft twee cirkels gelijk aan den gegevenen. De lijn $c = \infty$ geeft een cirkel met oneindig grooten straal.

14. Evenals bij den driehoek kan men ook hier een driehoekig coördinaten stelsel nemen, waarbij $a + b + c = 2s$ (fig. 25).

De lijnen $b + c = a$, $a + c = b$, $a + b = c$ loopen door de middens van de zijden van den driehoek. De zijde $a = 0$ komt overeen met de lijnen in het oneindige in No. 12 genoemd.

In het hoekpunt tegenover de zijde a zijn b en c oneindig klein ten opzichte van a, of a oneindig groot t/o van b en c.

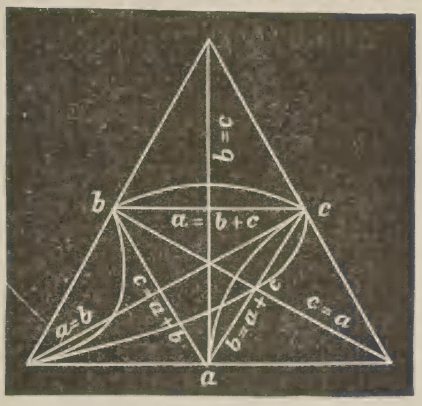


Fig. 25.

Daar liggen dus conchoïden van Nicomedes.

15. Zet men a, b en c af op drie onderling loodrechte assen dan ontstaat een ruimtediagram, waarvan figuur 7 een doorsnede is loodrecht op de a-as, en figuur 25 een doorsnede is met een vlak $a + b + c$ constant.

Het vlak $a = \infty$ bevat de conchoïden.

§ 4. CONCHOÏDE VAN NICOMEDES.

16. De conchoïde van Nicomedes ontstaat, wanneer men van uit een vast punt voerstralen trekt, en daarop van af de snijpunten met een gegeven lijn, in beide richtingen een stuk afzet van constante lengte. Neemt men b als de afstand van het vaste punt tot de richtlijn, en c het stuk dat men vanaf de richtlijn op de voerstralen afzet, dan heeft men in het indeelingsdiagram slechts de lijn $c = b$, die het gebied met $2 + 2$ buigpunten scheidt van dat met 2 buigpunten $+$ 1 dubbelpunt, en zelve 2 buigpunten $+$ 1 keerpunt geeft.

Als er een dubbelpunt is, dan maakt elk der raaklijnen daarin met den afstand b een hoek α, zoodanig dat $\sec. \alpha = \frac{c}{b}$. In het indeelingsdiagram kan men $\angle \alpha$ onmid-

delijk construeeren door de ordinaat c om haar voetpunt om te cirkelen tot ze tegen de c-as rust.

(*Wordt vervolgd.*)

Drie rechten van Simson en de parabolen, welke de drie zijden eens driehoeks raken

DOOR

H. SIERSMA J^R. (Leeuwarden.)

Zooals bekend is, liggen de voetpunten der loodlijnen, uit een punt des omgeschreven cirkels van △ ABC op de zijden neergelaten, in eene rechte, de rechte van Simson genoemd.

Dit punt is brandpunt eener parabool, die de zijden des driehoeks aanraakt, de rechte van Simson tot topraaklijn heeft, en wier richtlijn gaat door het hoogtepunt van △ ABC. De as der parabool is de loodlijn, uit het punt op die rechten neergelaten; haar snijpunt T met de topraaklijn is de top.

I. Kiezen we de drie punten, D_1, E_1, F_1 waar de hoogtelijnen den omgeschreven cirkel snijden, om de daarbij behoorende rechten van Simson te construeeren, dan sluiten dezen een driehoek PQR in. Zij verder DEF de voetpuntsdriehoek, D'E'F' de driehoek, gevormd door de raaklijnen in de hoekpunten van △ ABC aan den cirkel getrokken, dan hebben we 4 driehoeken, alle gelijkvormig, waarvan $D_1E_1F_1$ en PQR congruent.

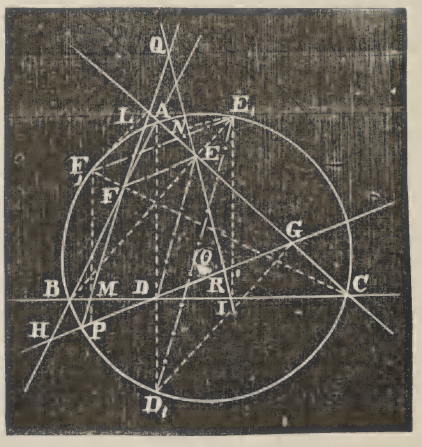


Fig. 1.

De zijden van △ DEF en △ QPR verhouden zich als 1 : 2 en die van △ DEF en △ D'E'F' als cos A cos B cos C : 1.

De zijden van al die driehoeken loopen evenwijdig.

Trekken we straal AO, dan is $\angle$ OAB = 90° — C.

In koordenvierhoek D_1HBD is $\angle$ BHD = $\angle$ BD_1D; en in koordenvierhoek AHD_1G is $\angle$ BHD = $\angle$ AD_1G = $\angle$ C.

Daarom staat PR loodrecht op straal OA; en is PR // FE // F_1E_1 // F'E'. Evenzoo toonen we aan, dat QR // DF // D'F' // D_1F_1, en PQ // DE // D_1E_1 // D'E'.

Omdat de hoekpunten D, E en F in de zijden van $\triangle$ PQR liggen, zijn die punten de middens van PR, RQ en QP.

Bekend is, dat de lijn D_1E_1 // DE en tweemaal zoo lang is; evenzoo de andere zijden. Dus is $\triangle$ PQR $\overset{\infty}{=}$ $\triangle$ $D_1E_1F_1$.

Nu is EF = a cos A = R sin 2 A; FD = b cos B = R sin 2 B; DE = c cos C = R sin 2 C; dus PQ = 2 DE = D_1E_1 = 2 R sin 2 C; QR = 2 DF = D_1F_1 = 2 R sin 2 B en RP = 2 EF = E_1F_1 = 2 R sin 2 A.

De lengte der raaklijnen in de punten A, B en C wordt in volgorde tusschen hare snijpunten: R sin A : cos B cos C; R sin B : cos A cos C; R sin C : cos A cos B, dus de verhouding dezer lijnen tot de overeenkomstige van $\triangle$ DEF = 1 : 2 R cos A cos B cos C.

Laten we de loodlijn E_1N neer op QR, dan is $\angle$ NE_1E = $\angle$ A — $\angle$ C; en daar E_1E = de afstand van E tot het hoogtepunt = a cotg A cos C = 2 R cos A cos C, is EE_1 = 2 cos A cos C, dus E_1N = 2 R cos A cos C cos (A — C).

Terloops zij opgemerkt, dat de voetpuntsdriehoek, (dus ook PQR) rechthoekig is, als de er overstaande hoek van $\triangle$ ABC = 45° is. Maar dan zijn de snijpunten der hoogtelijnen op die beenen met den cirkel uiteinden eener middellijn, zoodat we de bekende stelling terugvinden: de rechten van Simson voor de uiteinden eener middellijn staan loodrecht op elkaar.

II. Uit de punten D, E en F, waar de binnenbissectrices den omgeschreven cirkel snijden, laten we de loodlijnen op de zijden neer en trekken weer de rechten van Simson, dan ontstaat weer een driehoek PQR, die verwant toont te zijn met een paar andere belangrijke driehoeken. De driehoek, welks hoekpunten zijn de raakpunten van den ingeschreven cirkel met de zijden van $\triangle$ ABC, noemen we *def*. (*d* en D liggen over punt A enz.) We weten, dat $\triangle$ *def* en $\triangle$ DEF gelijkvormig zijn, en hunne zijden evenwijdig loopen; $\angle$ d = $\angle$ D = $\frac{1}{2}$ (B + C), $\angle$ e = $\angle$ E = $\frac{1}{2}$ (A + C) en $\angle$ f = $\angle$ F = $\frac{1}{2}$ (A + B) [1].

Omdat de zijden van $\triangle$ PQR loodrecht staan op de

[1] In de figuur staat c, lees e.

binnenbissectrices, sluiten ze hoeken in, gelijk aan die der bissectrices: $\angle P = \angle FMB = \frac{1}{2}(B + C)$ enz.

Omdat ef, EF en QR alle drie loodrecht staan op de lijn, die $\angle A$ halveert, loopen ze evenwijdig.

Verder is:

$ef = 2\,A\,e \sin \frac{1}{2} A = 2(s - a) \sin \frac{1}{2} A = (-a + b + c) \sin \frac{1}{2} A = 8\,R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A.$

Evenzoo is:

$de = 8\,R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C,$

en:

$df = 8\,R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} B.$

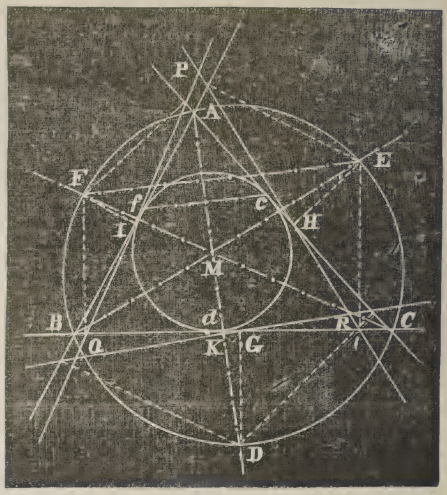


Fig. 2.

EF is de koorde van den boog, die een hoek $= \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C$ onderspant, en dus $= 2\,R \sin \frac{1}{2}(B + C) = 2\,R \cos \frac{1}{2} A$. Zoo is $DE = 2\,R \cos \frac{1}{2} C$ en $DF = 2\,R \cos \frac{1}{2} B$.

De verhouding der overeenkomstige zijden van de driehoeken def en DEF is dus: $4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C : 1$.

De zijden van $\triangle PQR$ gaan door de middens der zijden van $\triangle ABC$, en maken daarmee scherpe hoeken, gelijk aan: $\frac{1}{2}(A - C)$; $\frac{1}{2}(C - B)$, $\frac{1}{2}(B - A)$.

Zoo is, als H, I, G de middens zijn van BC, BA en AC: $\angle CHR = \frac{1}{2}(A - C)$; $\angle RGC = \frac{1}{2}(B - C)$; $\angle AIP = \frac{1}{2}(B - A)$.

In $\triangle HGR$ is nu: $HR : HG : GR = \sin \frac{1}{2}(B + C) : \sin \frac{1}{2}(A + B) : \sin \frac{1}{2}(A + C)$ waaruit, omdat $HG = \frac{1}{2} c = R \sin C$ is.

$HR = 2\,R \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C$; $RG = 2\,R \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$.

Evenzoo is: $HP = 2\,R \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C$ enz., dus:

$$PR = 2\,R(\cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} C + \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} C) = 2\,R \cos \tfrac{1}{2} B,$$

d.i. evenlang als FD; dus is $\triangle PQR \overset{\infty}{=} \triangle DEF$.

Omdat $DG = 2\,R \sin^2 \frac{1}{2} A$, en $\angle KDG = \frac{1}{2}(B - C)$, is $DK = 2\,R \sin^2 \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(B - C)$, en evenzoo:
$EH = 2\,R \sin^2 \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2}(A - C)$ en $FI = 2\,R \sin^2 \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2}(A - B)$.

III. Kiezen we nu een willekeurig punt F als brandpunt (op den omgeschreven cirkel), dan weten we, dat de

voetpunten der loodlijnen op de zijden AB, AC en CB neergelaten, d. i. c, b en a, punten van de topraaklijn zijn; de loodlijn uit F daarop neergelaten de as, en het snijpunt van beide rechten T, de top der parabool. Voor elke raaklijn aan de parabool is haar snijpunt met de topraaklijn midden tusschen haar raakpunt en haar snijpunt met de X-as gelegen; snijdt dus de X-as AB in c', en nemen we $c\gamma = cc'$, dan is γ het raakpunt op AB; eveneens bepalen we de raakpunten β op AC en α op BC.

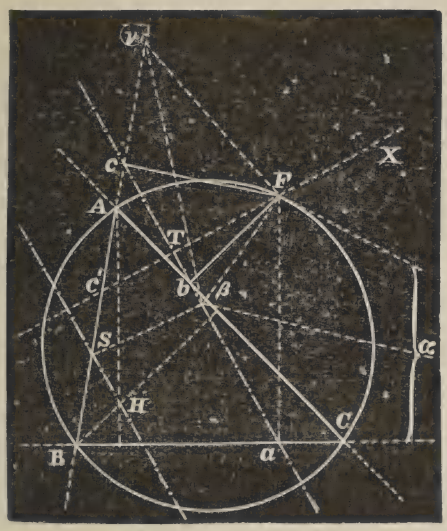


Fig. 3.

Uit de koordenvierhoeken FaAb, FcBa, en FbaC volgt in verband met het bovenstaande:

$\angle$ FAb = $\angle$ Fcb = $\angle$ FBa; $\angle$ cAF = $\angle$ cbF.

$\angle$ AFc = $\angle$ Abc = $\angle$ abC = $\angle$ aFC.

$\angle$ bCF = $\angle$ baF = $\angle$ cBF.

Laten we uit β de loodlijn βS op de richtlijn neer, dan gaat door dit voetpunt S ook de verlengde lijn Fb, zoodat bF den hoek βFT middendoordeelt. Nu is dus:

$$\angle \text{ AF}c = \angle \text{ A}bc = \angle \beta\text{F}b = \angle b\text{FT} = \angle \text{ CF}a.$$

Ook is nog uit de figuur langs eenvoudigen weg af te leiden:

$\angle$ AγF = $\angle$ bAF = $\angle$ FBC = $\angle$ Fcb,

$\angle$ AFγ = $\angle$ AFβ = $\angle$ A; $\angle$ βFC = $\angle$ CFα = $\angle$ C;

$\angle$ γFα = 2. $\angle$ B.

Stellen we nu TF = p ($\frac{1}{2}$ parameter). $\angle$ cFX = ϕ, dan is:

$\angle$ bFX = A + ϕ; $\angle$ aFX = A + C + ϕ = 180° — (B — ϕ).

$\angle$ bFT = 180° — (A + ϕ) = $\angle$ bFβ, enz.

$\angle$ BAF = 90° — (180° — A — ϕ) = A + ϕ — 90°.

$\angle$ FAC = ϕ — 90°, enz.

Al de lijnen laten zich nu in p, de hoeken A, B en ϕ uitdrukken. Zoo vinden we o. a.:

$bF = TF : \cos bFT = -p : \cos(A + \phi)$.
$\beta F = bF : -\cos(A+\phi) = p : \cos^2(A+\phi)$; $cF = -p : \cos\phi$.
$AF = cF : -\cos(A + \phi) = p : \cos\phi \cos(A + \phi)$.
$\gamma F = cF : \sin(\phi - 90°) = p : \cos^2\phi$.
$BF = cF : \sin(90° + B - \phi) = -p : \cos\phi \cos(B - \phi)$.
$CF = bF : \sin(90° + B - \phi) = -p : \cos(A + \phi)\cos(B - \phi)$.
$aF = -p : \cos(B - \phi)$; $\alpha F = p : \cos^2(B - \phi)$.
$A\gamma = -p \sin A : \cos^2\phi \cos(A + \phi)$.
$B\gamma = p \sin B : \cos^2\phi \cos(B - \phi)$.
$c\gamma = +p \sin\phi : \cos^2\phi$; $cB = p \operatorname{tg}(B - \phi) : \cos\phi$.
$B\alpha = -p \sin B : \cos\phi \cos^2(B - \phi)$; $aB = -p \operatorname{tg}\phi : \cos(B - \phi)$.
$a\alpha = -p \operatorname{tg}(B - \phi) : \cos(B - \phi)$.
$A\beta = -p \sin A : \cos\phi \cos^2(A + \phi)$.

Omdat $AB = B\gamma - A\gamma =$

$$p\left\{\frac{\sin B}{\cos(B - \phi)\cos^2\phi} + \frac{\sin A}{\cos^2\phi \cos(A + \phi)}\right\} =$$
$$p \sin C : \cos\phi \cos(A + \phi)\cos(B - \phi),$$

vinden we o.a. door den sinusregel:

$$AC = p \sin B : \cos\phi \cos(A + \phi)\cos(B - \phi),$$
$$BC = p \sin A : \cos\phi \cos(A + \phi)\cos(B - \phi).$$

De straal van den cirkel, om $\triangle ABC$ beschreven:

$$R = \tfrac{1}{2} p : \cos\phi \cos(A + \phi)\cos(B - \phi).$$

Ook de oppervlakken der driehoeken met 3 der bekende punten kunnen we in de gegevens uitdrukken en komen dan tot fraaie symmetrische vormen:

Opp. $\triangle F\beta\gamma = \frac{1}{2}\beta F \times \gamma F \times \sin 2A =$
$\frac{1}{2} p^2 \sin 2A : \cos^2\phi \cos^2(A + \phi)$.
Opp. $\triangle F\beta\alpha = \frac{1}{2} p^2 \sin 2C : \cos^2(A + \phi)\cos^2(B - \phi)$.
Opp. $\triangle F\gamma\alpha = \frac{1}{2} p^2 \sin 2B : \cos^2\phi \cos^2(B - \phi)$.

De som dezer oppervlakken levert het oppervlak van den driehoek $\alpha\beta\gamma$, die de raakpunten tot hoekpunten heeft. Nu korte herleiding komt er:

Opp $\triangle \alpha\beta\gamma = p^2 \sin A \sin B \sin C : \cos^2\phi \cos^2(A + \phi)\cos^2(B - \phi)$.

Zoo vinden we:

Opp. $\triangle ABF = {}^1/_2\, AB.\, BF.\, \cos(B - \phi) =$
$-\frac{1}{2} p^2 \sin C : \cos^2\phi \cos(B - \phi)\cos(A + \phi)$.
Opp. $\triangle BCF = \frac{1}{2} p^2 \sin A : \cos\phi \cos^2(B - \phi)\cos(A + \phi)$.
Opp. $\triangle ACF = -\frac{1}{2} p^2 \sin B : \cos\phi \cos(B - \phi)\cos^2(A + \phi)$.

Nu is: $\triangle ABC = \triangle ABF + \triangle BCF - ACF$,
en na korte herleiding:

Opp. $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2} p^2 \sin A \sin B \sin C :$
$\cos^2 \phi \cos^2 (B - \phi) \cos^2 (A + \phi)$,
d.i. juist de bekende stelling:

de driehoek, door 3 raaklijnen gevormd, is de helft van den driehoek tusschen de raakpunten.

Eenvoudiger ware $\triangle$ ABC gevonden: $\frac{1}{2}$ AB. BC sin B, enz.

Uit deze betrekkingen laten zich nog eenige verhoudingen afleiden:

$$\triangle \beta F\alpha . \triangle \alpha F\gamma . \triangle \gamma F\beta = \frac{p^6 \sin 2A \sin 2B \sin 2C}{8 \cos^4 \phi \cos^4 (A + \phi) \cos^4 (B - \phi)}.$$

$$\triangle AFB . \triangle BFC . \triangle CFA = \frac{p^6 \sin A \sin B \sin C}{8 \cos^4 \phi \cos^4 (A + \phi) \cos^4 (B - \phi)},$$

$$\text{dus: } \frac{\triangle \beta F\alpha . \triangle \beta F\gamma . \triangle \gamma F\beta}{\triangle BFA . \triangle AFC . \triangle CFB} = 8 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\text{Opp. } \triangle \gamma B\alpha = \tfrac{1}{2} B\gamma . B\alpha . \sin B = - \frac{p^2 \sin^3 B}{2 \cos^3 \phi \cos^3 (B - \phi)}.$$

$$\text{Opp. } \triangle A\gamma\beta = \tfrac{1}{2} A\gamma . A\beta . \sin A = \frac{p^2 \sin^3 A}{2 \cos^3 \phi \cos^3 (A + \phi)}.$$

$$\text{Opp. } \triangle C\alpha\beta = \tfrac{1}{2} C\alpha . C\beta . \sin C = - \frac{p^2 \sin^3 C}{2 \cos^3 (A + \phi) \cos^3 (B - \phi)}.$$

Het product dezer oppervlakken =

$$\frac{p^6 \sin^3 A \sin^3 B \sin^3 C}{8 \cos^6 \phi \cos^6 (B - \phi) \cos^6 (A + \phi)}.$$

Voeren we als hulpgrootheid $R = \frac{1}{2} p : \cos \phi \cos (B - \phi) \cos (A + \phi)$ in, dan wordt:

Opp. $\triangle \beta F\gamma . \triangle \beta F\alpha . \triangle \gamma F\alpha = 2 p^2 R^4 \sin A \sin B \sin C.$

Opp. $\triangle$ AFB. $\triangle$ BFC. $\triangle$ CFA $= 2 p^2 R^4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$

Opp. $\triangle \alpha B\gamma . \triangle \beta A\gamma . \triangle \alpha C\beta = 8 R^6 \sin A^3 \sin^3 B \sin^3 C.$

De laatste vorm blijft dus onveranderd, waar ook het brandpunt op den omgeschreven cirkel genomen worde.

IV. Keeren we nu tot onze eerste plaatsing van het brandpunt terug, dan is voor E_1 als zoodanig $\angle \phi = 180° - C$, zoodat:

$p = a \cos (180° - C) \cos (A + 180° - C) \cos (B + C - 180°) : \sin A$,
$p = 2 R \cos A \cos C \cos (A - C)$, zooals boven gevonden werd.

Door substitutie dezer waarde voor ϕ vereenvoudigen zich vele der gevonden lengten.

Nemen we het brandpunt in E, (2e geval) dan is $\phi = 90° + \frac{1}{2} B$, dus $p = a \cos (90° + \frac{1}{2} B) \cos (A + \frac{1}{2} B + 90°)$

$\cos(\frac{1}{2} B - 90°) : \sin A = 2 R \sin^2 \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} (A - C)$, ook als in II gevonden werd.

Ook hier ondergaan enkele formules vereenvoudiging.

V. Is nu omgekeerd, behalve de drie raaklijnen de *richting* van topraaklijn (of richtlijn) bekend, dan kan het bijbehoorende punt F gevonden worden (fig. 3).

De asrichting, loodrecht op de gegeven richting, is eveneens bekend; verder is: $\angle ABF = \angle (FT, CB)$. Deze hoek is gegeven, omdat BC en de asrichting bekend is, zoodat F te vinden is.

Evenzoo zou men gebruik kunnen maken van eene andere raaklijn en de lijn uit het hoekpunt naar F; dus liggen B, c, F, a op een cirkel, die BF tot middellijn heeft.

Trek daarom eene willekeurige lijn // de gegeven richting, die de beenen van $\angle$ B snijdt, en richt in de snijpunten loodlijnen op de beenen op, die elkaar steeds zullen snijden in een punt van BF; die lijn is te trekken en haar snijpunt met den omgeschreven cirkel levert F.

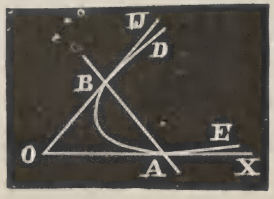
De vergelijking $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} - 1 = 0$,

DOOR

J. N. VISSCHERS ('s-Hertogenbosch).

In „Leçons de Géométrie Analytique par MM G. Briot et J. C. Bouquet, quatorzième édition, revue et annotée par M. Appell, lees ik op bladz. 268, No. 282:

„On peut déterminer le paramèter k par la condition que la courbe soit une parabole. Si l'on prend les deux tangentes pour axes des coordonnées, l'équation devient $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - kxy = 0$. Pour que la courbe soit une parabole, il faut que la condition $\left(k - \frac{1}{ab}\right)^2 - \frac{1}{a^2 b^2} = 0$ soit vérifiée; ce qui donne les deux solutions $k = 0$, $k = \frac{2}{ab}$; à la première correspond la droite ab; à la seconde une



parabole dont l'équation peut être mise sous la forme $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}-1=0$."

M. i. is 't onjuist te zeggen, dat de verg. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}-1=0$ een parabool voorstelt, rakende aan de coördinatenassen in de punten, waarin deze gesneden worden door de rechte $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$. De verg. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}-\frac{2x}{a}-\frac{2y}{b}+1=0$, die zoo'n parabool voorstelt, kan wel op de volgende wijze uit de andere worden afgeleid:

$$\mathrm{I_a}\quad \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}-1=0.$$

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1.$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2=1.$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+2\sqrt{\frac{xy}{ab}}=1.$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=-2\sqrt{\frac{xy}{ab}}.$$

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2=\frac{4xy}{ab}.$$

$$\mathrm{II.}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}-\frac{2x}{a}-\frac{2y}{b}+1=0.$$

Nu mag echter $\mathrm{I_a}$ niet in de plaats van II worden gesteld. Tot verg. II komt men ook, uitgaande van:

$$\mathrm{I_b}\quad \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+1=0.$$

$$\mathrm{I_c}\quad \sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{y}{b}}-1=0.$$

$$\mathrm{I_d}\quad \sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{y}{b}}+1=0.$$

Omgekeerd kunnen de verg. $\mathrm{I_a}$, $\mathrm{I_b}$, $\mathrm{I_c}$ en $\mathrm{I_d}$ uit II worden afgeleid.

Indien verg. $\mathrm{I_a}$ de bedoelde parabool voorstelde, zou $y=0$ de raaklijn moeten zijn in 't punt $(a, o.)$. Stellen wij $y=0$ in die verg. dan komt

$$\sqrt{\frac{x}{a}} = 1, \qquad \frac{x}{a} = 1, \qquad x = a.$$

Dit antwoord zegt ons, dat de x-as wel 't punt (a, o) met de kromme gemeen heeft, doch niet, dat zij een raaklijn is.

Stellen wij in verg. I_a $x = 4\,a$, dan moeten hierbij 2 positieve waarden van y behooren. Wij vinden:

$$\sqrt{4} + \sqrt{\frac{y}{b}} - 1 = 0, \qquad \sqrt{\frac{y}{b}} = -1,$$

d. i. een valsche vergelijking.

I_a stelt den tak AB der parabool voor.

I_b stelt geen enkel reëel punt.

I_c stelt den tak AE der parabool voor en

I_d den tak BD.

Stellen wij in I_c $x = 4\,a$, dan vinden wij $y = b$. Diezelfde waarde voor x overgebracht in I_d geeft $y = 9\,b$. Beide waarden voor y vinden wij bij 't zoeken der snijpunten van $x = 4\,a$ met de parabool II.

Ook in van Geer, Leerboek der Analytische Meetkunde, Deel I, bladz. 166 lees ik:

„Voor $\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} - \frac{2\,x\,y}{x_1\,y_1} - \frac{2\,x}{x_1} - \frac{2\,y}{y_1} + 1 = 0$

kan geschreven worden:

$$\left(\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} - 1\right)^2 = \frac{4\,x\,y}{x_1 y_1}, \qquad \text{of: } \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{y_1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Deze verg. stelt derhalve voor de parabool, die de coördinatenassen in de punten x_1 en y_1 aanraakt."

De constructie van de centrale as van een krachtenstelsel

DOOR

C. KREDIET (Rotterdam).

Wanneer op een lichaam een willekeurig stelsel van krachten werkt, laat zich in 't algemeen dit stelsel herleiden tot ééne kracht en een koppel. Valt de as van het koppel samen met de lijn volgens welke die kracht werkt, zoo heet die lijn de centrale as. Wij mogen bij onze lezers wel bekend veronderstellen, dat in dat geval het koppel een minimale waarde heeft.

Gewoonlijk gebeurt het zoeken van de resultante en het resulteerend koppel door aanneming van drie onderling loodrechte coördinaten-assen, door ontbinding der krachten in de drie richtingen dier assen, door overbrenging van die ontbondenen naar den oorsprong door middel van koppels met de coördinaten-assen tot assen en door samenstelling der aldus verkregene krachten in den oorsprong en der koppels in de coördinaten-vlakken.

Zijn de grootte, de richting en het aangrijpingspunt eener kracht gegeven door P, de richtingscosinussen α, β, γ en de coördinaten van het aangrijpingspunt a, b, c; is de resultante R in den oorsprong bepaald door de richtingscosinussen λ, μ, ν en zijn de koppels in het YOZ, ZOX en en XOY vlak met momenten L, M en N, zoo vindt men de betrekkingen

$$\left.\begin{array}{l} R\lambda = \Sigma P\alpha \\ R\mu = \Sigma P\beta \\ R\nu = \Sigma P\gamma \\ L = \Sigma P(b\gamma - c\beta) \\ M = \Sigma P(c\alpha - a\gamma) \\ N = \Sigma P(a\beta - b\alpha) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Het is onnoodig deze vergelijkingen te bewijzen, aangezien zij in elk eenigszins uitvoerig leerboek der mechanica te vinden zijn. Wij hebben ze alleen even willen herinneren, daar wij de vergelijkingen (1) bij onze beschouwingen noodig hebben.

Wij projecteeren de krachten P op de drie coördinatenvlakken, die wij beschouwen als de drie projectie-vlakken der beschrijvende meetkunde. Beschouwen wij, om de gedachte te bepalen, het XOY-vlak. De projecties der krachten P vormen in dit vlak een krachtenstelsel in één plat vlak. De aangrijpingspunten zijn gegeven door de coördinaten a en b, de ontbondenen volgens X- en Y-as zijn, zooals wel duidelijk is, respectievelijk $P\alpha$ en $P\beta$. Dit krachtenstelsel stellen wij volgens de gewone middelen der werktuigkunde, of wellicht gemakkelijker met behulp van de constructies der graphostatica samen. De resultante, om bij het meest algemeene geval te blijven, zal dan werken langs een bepaalde lijn, waarvan de vergelijking wordt aangegeven door

$$y\,\Sigma P\alpha - x\,\Sigma P\beta = \Sigma P(b\alpha - a\beta),$$

dus in verband met (1)

$$x\mu - y\lambda = \frac{N}{R}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Handelen wij nu op gelijke wijze in de beide andere projectie-vlakken, zoo vinden wij ook daar twee lijnen, die tot vergelijking hebben

$$\left.\begin{aligned} y\nu - z\mu &= \frac{L}{R} \\ z\lambda - x\nu &= \frac{M}{R} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Gesteld dat wij in een beschrijvende meetkunde-teekening deze drie lijnen geconstrueerd hebben, zoo valt het niet moeielijk om de beide lijnen (3) te beschouwen als de projectiën van een lijn in de ruimte en de nog ontbrekende projectie dier lijn uit die twee te construeeren. Analytisch komt dit hierop neer, dat wij de vergelijkingen (3) beschouwen als de vergelijkingen van een lijn in de ruimte en dat wij door eliminatie van z de derde projectie dezer lijn bepalen. Die eliminatie levert

$$x\mu - y\lambda = -\frac{L\lambda + M\mu}{R\nu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Deze lijn is dus evenwijdig aan de lijn, aangegeven door vergelijking (2). De afstand van (2) tot (4) is

$$p = -\frac{N}{R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} - \frac{L\lambda + M\mu}{R\nu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}},$$

dat is

$$p = -\frac{L\lambda + M\mu + N\nu}{R\nu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wanneer wij den oorsprong van ons coördinaten-stelsel naar een punt x_1, y_1, z_1 verplaatsen, veranderen van de vergelijkingen (1) alleen de laatste drie in

$$L_1 = \Sigma P\left((b - y_1)\gamma - (c - z_1)\beta\right), \text{ enz.},$$

dat is:

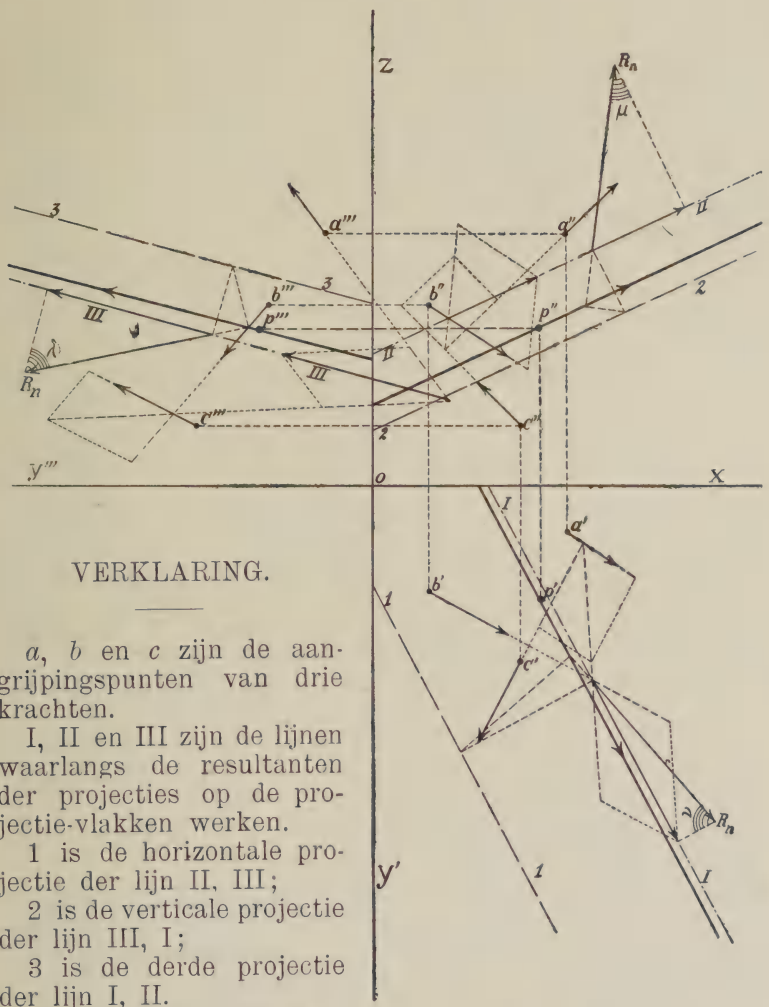
$$L_1 = \Sigma P(b\gamma - c\beta) - R(y_1\nu - z_1\mu),$$

of

$$L_1 = L - R(y_1\nu - z_1\mu).$$

Is nu x_1, y_1, z_1 een punt der centrale as, zoo moeten de waarden L_1, M_1, N_1 evenredig zijn met $R\lambda$, $R\mu$ en $R\nu$ en dus worden de vergelijkingen der centrale as:

$$\frac{L - R(y_1\nu - z_1\mu)}{\lambda} = \frac{M - R(z_1\lambda - x_1\nu)}{\mu} = \frac{N - R(z_1\mu - y_1\lambda)}{\nu}.$$



VERKLARING.

---

a, b en c zijn de aangrijpingspunten van drie krachten.

I, II en III zijn de lijnen waarlangs de resultanten der projecties op de projectie-vlakken werken.

1 is de horizontale projectie der lijn II, III;

2 is de verticale projectie der lijn III, I;

3 is de derde projectie der lijn I, II.

p = punt der centrale as, dat als aangrijpingspunt der resultante gekozen is.

λ, μ, ν = hoeken van R met de coördinaten-assen.

Elk dezer breuken is gelijk aan $\frac{L\lambda + M\mu + N\nu}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, d.i. $L\lambda + M\mu + N\nu$.

De projectie der centrale as op het XOY-vlak is dus

$$\frac{N - R(x_1 \mu - y_1 \lambda)}{\nu} = L\lambda + M\mu\, N\nu,$$

of

$$x_1 \mu - y_1 \lambda = \frac{N}{R} - \frac{\nu (L\lambda + M\mu + N\nu)}{R} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Deze projectie is opnieuw evenwijdig aan de lijn voorgesteld door (2) en de afstand van (2) tot (6) is

$$q = -\frac{N}{R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} - \left\{ -\frac{N - \nu (L\lambda + M\mu + \nu)}{R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \right\},$$

d. i.

$$q = -\frac{\nu (L\lambda + M\mu + N\nu)}{R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^a),$$

dus

$$q = p\,\nu^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^b).$$

Het zal wel duidelijk zijn dat de resultante der krachten op het XOY-vlak tot grootte heeft $\sqrt{(\Sigma P\alpha)^2 + (\Sigma P\beta)^2}$, dat is $R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$. Indien men nu volgens de gewone middelen der beschrijvende meetkunde de resultante R om hare projectie op het XOY-vlak op dit vlak neerslaat, zal daardoor de hoek, waarvan ν de cosinus is, gevonden zijn en de constructie van q, p eenmaal bekend zijnde, is zoo eenvoudig dat wij hier geen uitlegging dier constructie behoeven te geven. Daarmede is dan echter de projectie der centrale as op het XOY-vlak gevonden en een analoge constructie bepaalt de andere projecties. 't Spreekt van zelf, dat men, als men contrôle op de juistheid der teekening wil hebben, alle drie de projecties op de bedoelde wijze construeert.

Het koppelmoment in het XOY-vlak is, zooals reeds gezegd, gelijk aan N_1, als

$$N_1 = N - R(x_1 \mu - y_1 \lambda),$$

dus, in verband met (6) vinden wij

$$N_1 = N - (N - \nu (L\lambda + M\mu + N\nu)),$$

dat is in verband met (7[a])

$$N_1 = -q\,R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2},$$

en dus

N_1 is het moment van de kracht $R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, werkende langs de lijn (2) ten opzichte van een punt van de projectie van de centrale as. Bijgevolg levert de door ons aangegeven constructie niet alleen de centrale as, doch tevens de grootte van de krachten $R\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, $R\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}$, $R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ en de grootten der koppels L_1, M_1 en N_1, dus de projecties van de resultante en het resulteerend koppel.

In de bijgevoegde teekening is voor 3 krachten de geheele constructie uitgevoerd, evenwel zijn enkele hulplijnen, die de lezer onmiddellijk zal begrijpen, weggelaten.

Verschillende opmerkingen

DOOR

Dr. N. QUINT (den Haag).

---

1. De behandeling van de hoofdeigenschappen van den regelmatigen 10- en 5-hoek geschiedt in onze leerboeken niet op een wijze, die onzen leerlingen het eenvoudigst deze eigenschappen zelf doet inzien. De volgende behandelingswijze verdient m. i. daarom den voorkeur.

1. In een gelijkbeenigen driehoek (fig. 1) met een tophoek van 36° is de deellijn van een basishoek gelijk aan de basis en aan het grootste stuk van de overstaande zijde.

Fig. 1.

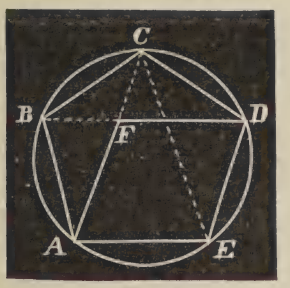


Fig. 2.

2. In deze figuur moet dan $AB = R$, $AC = a_{10}$ stellend, blijkens een stelling van de deellijn:

$$R : a_{10} = a_{10} : (R - a_{10}).$$

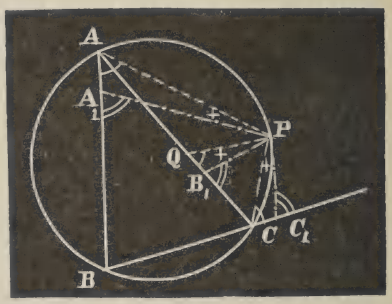
3. Zij ABCDE (fig. 2) een regelmatige vijfhoek, dan leert de vorige stelling op $\triangle$ ACE toegepast, dat de zijde van dien veel-

hoek het grootste stuk is van de in gulden verhouding verdeelde diagonaal.

4. Daar AFDE een ruit zal wezen leert de figuur onmiddellijk, dat AC door BD in gulden verhouding verdeeld zal worden.

2. *De lijn van Wallace.*

Van Poncelet (1822) is de opmerking afkomstig, dat niet alleen, zooals Wallace vond, de rechte projecties van een punt van een cirkel op de zijden van een ingeschreven driehoek collineair zijn, maar dat dit evenzeer het geval is met de scheeve projecties van dat punt.



Het eenvoudigste is dit theorema wellicht aldus in te zien.

A, Q, C kunnen beschouwd worden als scheeve projecties van P op de zijden van $\triangle$ ABC. Worden nu de lijnen PA, PQ, PC eenzelfden hoek gedraaid, dan zullen zij ook in dezelfde reden vergroot worden en blijven dus de uiteinden A_1, B_1, C_1 collineair.

3. *Het z.g. theorema van Matthew Stewart.*

Het zal wel meer opgemerkt zijn, hoewel schrijver dezes het nergens zag, dat het z.g. theorema van Stewart een eenvoudig geval is van de stelling der mechanica over het verband tusschen de traagheidsmomenten om een willekeurig as en om een daarmede evenwijdige as door het zwaartepunt.

Wordt de basis AB in het punt D in stukken $AD = p$ en $DB = q$ verdeeld, dan kan D beschouwd worden als het zwaartepunt van massa's q en p in A en B. Het traagheidsmoment om C zal nu volgens de genoemde stelling geven:

$$p\,a^2 + q\,b^2 = (p+q)\,CD^2 + p\,q^2 + q\,p^2,$$
$$= (p+q)\,CD^2 + p\,q\,(p+q),$$

d. i. het z. g. theorema van Stewart.

Wij schreven het *z. g.* theorema van Stewart omdat blijkens de onderzoekingen van J. S. Mackay, meegedeeld in de *Proc. Edinb. Math. Soc.* X 1892 niet *Matthew*

Stewart (1717—1785), maar zijn leermeester *Robert Simson* (1687—1768) de stelling ontdekt heeft.

Deze toch werd het eerst gedrukt in *Stewart's Some general Theorems of considerable use in the higher parts of mathematics* (1746), waarin, zooals ook in de voorrede gezegd wordt, alle stellingen op een of twee na oorspronkelijk zijn. Het werk van Stewart geraakte in het vergeetboek tot Chasles in zijn *Aperçu historique* het boek besprak en op het belang wees van de genoemde stelling, die „à peu près inconnue de nos jours, mériterait bien de prendre place dans les éléments ou au moins dans les compléments de la géometrie." (*Ap. hist.* bl. 176.)

Sinds werd de stelling bij het elementaire onderwijs ingelijfd en naar Stewart genoemd.

Ten onrechte echter, want tot de niet-oorspronkelijke stellingen in de *General Theorem* behoorde ook juist dit theorema. In de *Loci Plani* toch, verschenen in 1749, zegt Simson uitdrukkelijk op bl. 221, dat hij de stelling ontdekte en ze ook als taak opgaf aan zijne leerlingen James Moor en Matthew Stewart, welke laatste het met een ander bewijs in zijne *General Theorems* meedeelde. Waarschijnlijk dateert de stelling van 1741.

Simson zou dus schadeloos gesteld worden voor het verlies van de rechte, die hij aan Wallace heeft moeten afstaan.

4. *Een radianometer.*

Over den radiaal als hoekmaat zijn de leerlingen door de bank slecht te spreken. Geen wonder; sinds de *Babyloniërs* heeft de menschheid al van graden gehoord, terwijl de moderne hoekmaat eerst van de laatste tijden dateert.

Naar de ervaring leert wordt het begrip radiaal den leerlingen veel duidelijker zoo hun een verdeeling in radialen getoond wordt. Hiertoe kan de radianometer de plaatsvervanger van den graadboog, dienen. Hij is verdeeld in radialen en tienden en honderdsten van radialen. Al is hij vooral geschikt bij het construeeren van kromme lijnen, toch is hij ook bij het onderwijs een niet te versmaden hulpmiddel.

De radianometer is van doorschijnend celluloid door de firma Lilley and Son te Londen vervaardigd en door tusschenkomst van den boekhandel voor één shilling verkrijgbaar.

Uit buitenlandsche tijdschriften.

1. De meetkundige plaats van de middelpunten der kegelsneden in een gegeven vierhoek beschreven, is de lijn gaande door de middens van de hoeklijnen. (Tegelijk antwoord op vraagstuk 63.)

Laat één zoo'n middelpunt P zijn voor den vierhoek ABCD, terwijl de raakpunten 1, 2, 3 en 4 zijn. De lijn 1—4 wordt door PA middendoor gedeeld, enz., daarom hebben wij: $\triangle$ P1A = $\triangle$ P4A; $\triangle$ P1B = $\triangle$ P2B; $\triangle$ P2C = $\triangle$ P3C; $\triangle$ P3D = $\triangle$ P4D. $\triangle$ PAB — $\triangle$ PBC = 2 $\triangle$ PBE; $\triangle$ PAD — $\triangle$ PDC = 2 $\triangle$ PDE; $\triangle$ PBE = $\triangle$ PDE, dus EP, verlengd, deelt BD middendoor. (*Mathematical Gaz.*)

C. A. Cikot.

2. Binnen een drievlakkenhoek OABC is een punt S gegeven; de doorsnede welke S tot zwaartepunt heeft snijdt eene minimum-pyramide af.

Eerste bewijs. Laat OAB'C' eene der afgesneden pyramides zijn, terwijl AS in D B'C' snijdt; trek dan door D in het vlak C'OB' BC zóó, dat die lijn in B gehalveerd wordt, dan is $\triangle$ OBC $<$ $\triangle$ OB'C', dus ook OABC $<$ OAB'C'; houd nu een hoekpunt A vast op eene ribbe, dan is die pyramide minimum, waarin de verbindende lijn AS de overstaande zijde halveert; hieruit blijkt, dat S het zwaartepnnt van de doorsnede moet zijn.

Tweede bewijs. Neem OA, OB en OC tot coördinaatassen aan, en laat verder de coördinaten van S a, b en c zijn. Leg nu door S verschillende vlakken, dan ontstaan er pyramides die zich verhouden als de producten der stukken u, v en w van de ribben afgesneden, m. a. w. uvw moet minimum zijn, terwijl men heeft: $\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}=1$.

Stel $\frac{1}{u}=x$, $\frac{1}{v}=y$ en $\frac{1}{z}=w$, dan moet xyz maximum zijn, en is $ax+by+cz=1$. xyz, of $abcxyz$ maximum voor: $ax=by=cz=\frac{1}{3}$, of $u=3\,a$, $v=3\,b$, $w=3\,c$.

(*Hoffmann. 1883.*)

C. A. Cikot.

3. De redactie van de *Enseignement mathématique* heeft aan verschillende wiskundigen van naam hun oordeel gevraagd over „les conditions que doit remplir un enseignement

complet, théorique et pratique, des mathématiques dans les établissements supérieurs." Speciaal heeft ze de aandacht gevestigd op drie vragen, die ze ook aan hare lezers aanbeveelt. Deze vragen zijn: 1e. Welke verbeteringen zijn er aan te brengen in het onderwijs van de zuivere wiskunde? 2e. Welken rol moeten de „établissements supérieurs" spelen bij de vorming van wiskunde-leeraars? 3e. Hoe moet het wiskunde-onderwijs ingericht worden opdat het, beter dan vroeger, beantwoorde aan de behoeften van de andere vakken?

Gino Loria antwoordt, dat een eerste wenschelijke verbetering in het wiskunde-onderwijs zou zijn: het versnellen van het marsch-tempo. Het groote gebouw, waarvan de oude wiskundigen de stevige grondslagen gelegd hebben, wordt dagelijks hooger, breeder en dieper; als men er zich toe beperkt de leerlingen in kennis te brengen met de beganen gronds-verdieping (die trouwens de donkerste en minst aantrekkelijke van alle is), dan is het te verwachten, dat ze noch tijd noch lust zullen hebben naar de bovenste verdiepingen te klimmen. Deze versnelling van gang is ongetwijfeld mogelijk, want in de elementen zijn er verschillende hoofdstukken die onder het „ancien régime" onmisbaar waren, maar die thans bij een eerste onderwijs voor nuttiger dingen dienen plaats te maken. Zoo de theorie der verhoudingen van Euclides, en de elementaire behandeling der kegelsneden. In hun plaats zou men kunnen invoeren sommige zoogenaamde hoogere theorieën, maar die noodzakelijk gedemocratiseerd moesten worden (b.v. de analytische meetkunde). In de tweede plaats moest men wat meer op de toepassingen letten. (Zooals men ziet helt Loria tot de ideeën van Perry over, zonder in diens radicalisme te vervallen.)

Wat de opleiding van leeraars betreft, deze diende eene nog ingrijpender verandering te ondergaan. Tegenwoordig wordt bij die opleiding weinig of niet gedacht aan de latere bestemming der studenten. Zij hooren de hooge wetenschap verkonden, trachten zelfs bij te dragen tot den vooruitgang van onze positieve kennis, maar nooit denken zij er aan hoe ze later een mathematische theorie aan onkundigen moeten voordragen. Bijv., zijn ze „getraind" in het cijferen? Leert men hen op het bord teekeningen maken, die werkelijk een hulp voor de leerlingen zullen zijn? Kennen zij de resultaten van de opvoedkunde welke

deze onder den invloed van de wetenschappelijke psychologie verkregen heeft?

Emile Borel beperkt zich tot één punt, waaraan hij zegt een groot belang te hechten, n.l. de hervormingen van het elementair meetkunde-onderwijs. Hij zegt dat vrijwel iedereen het er over eens is, dat de zuiver-„Euclidische" methodes niet meer rijmen met de vorderingen van de moderne wiskunde. „De meetkunde is de studie van de groep der bewegingen", deze fondamenteele waarheid moet meer en meer het onderricht doordringen. Maar, zoo eens als men er over is, dat er iets moet gebeuren, zoo oneens is men het als er gepreciseerd moet worden. Dit moet ons niet verwonderen, want het is duidelijk, dat elke voorgestelde oplossing niet in bijzonderheden zoo afgewerkt kan zijn als de „Euclidische" meetkunde, waaraan geslachten gewerkt hebben. Slechts na veel boeken, artikelen en proeven zal er een meetkunde kunnen ontstaan, die even logisch is als die van Euclides, maar levendiger, interessanter en toegankelijker. Ten slotte spoort hij de mannen van lager, middelbaar en hooger onderwijs aan mee te helpen om de geboorte van die nieuwe meetkunde te verhaasten. C. A. Cikot.

4. Uit een opstel van Richter in de „Neue Jahrbücher für das klassische Alterthum."

„Men kon de Planimetrie besnoeien, om aan de Stereometrie wat meer plaats te geven. Wat de meeste leerlingen, die eind-examen gedaan hebben, van Planimetrie meenemen is niet veel meer dan wat in de Stereometrie toepassing heeft gevonden, terwijl zij door de te late en te korte behandeling van de Stereometrie voor hun latere leven veel missen. Voor dengene die het principe huldigt, dat we voor het leven opleiden, kan de Planimetrie slechts middel zijn, te meer daar de *gekunstelde* planimetrische constructies geen nut hebben; de Planimetrie is uit haren aard een deel van de ruimteleer, en met deze onafscheidelijk verbonden (denk aan het tot bedekking brengen van twee driehoeken, die tegengesteld congruent zijn)."

C. A. Cikot.

5. Sedert het begin van dit jaar verschijnt, als combinatie van de vroegere tijdschriften „School Sciene" en „School Mathematics" het tijdschrift School sciene and mathematics, en wel in Chicago. 't Tijdschrift geeft bijna uitsluitend

Methodiek; het is een orgaan van de meeste Noord-Amerikaansche vereenigingen van leeraren in exacte wetenschappen. Om een idee er van te geven, laten we hier volgen het verhandelde op de eerste vergadering van de „Missouri Society" van Wiskunde-leeraars.

Lezingen werden over de volgende onderwerpen gehouden:

1. Wederkeerige betrekkingen tusschen Rekenkunde, Stelkunde, Meetkunde en Trigonometrie. (Dit onderwerp is vooral in een Amerikaansche vergadering op zijn plaats omdat de middelbare school daar begint met Stelkunde; 't volgend jaar wordt de Planimetrie behandeld en de Stelkunde totaal weggelaten enz).
2. Een proef met individueel onderwijs.
3. Een methode van onderricht in elementaire Meetkunde.
4. Het wiskundig onderricht op de middelbare school.
5. Eenige ontwikkelingen in elementaire Stelkunde.
6. Nul en oneindig op de middelbare school.

Uit de discussies over deze onderwerpen blijkt o.a., dat men in Amerika, evenals in Engeland, Duitschland en Frankrijk, er op uit is de beginselen der Meetkunde voor beginnende minder abstract te maken. De inleider van no. 3 zeide, onder meer, dat hij er meer op uit was de belangstelling van den leerling te wekken, zijn vindingskracht te oefenen, en hem een goed inzicht in de feiten te geven, dan op het bereiken van de uiterste strengheid bij het bewijzen. Verder, dat men meer verband tusschen de onderdeelen der Wiskunde wenscht, en dat de leerlingen gaarne doen aan grafische voorstellingen van functies.

In sommige lezingen krijgen de schoolboeken er van langs; zoo critiseert A. Sanders de manier waarop de theorie van de limieten soms wordt toegepast. Hij neemt dit voorbeeld: Als een prisma, waarvan het grondvlak een regelmatige veelhoek is, in een cirkelcilinder beschreven is, en men laat het aantal zijden in van dit grondvlak onbepaald toenemen, dan nadert de inhoud van het prisma totdat van den cilinder, en het zijdelingsch oppervlak nadert tot dat van den cilinder". Van alle franje ontdaan is het gegeven bewijs als volgt:

„Daar de omtrek van het cilinder-grondvlak de grens is van den omtrek van het prisma-grondvlak, en de oppervlak van het eerste grondvlak de grens is van het tweede, *daarom* is de grens van het prisma de cilinder (zoowel wat oppervlak als wat inhoud betreft)." Dit bewijs hinkt.

Toen in de Planimetrie bewezen werd werd dat de omtrek van den cirkel de grens is van dien van een ingeschreven veelhoek bij het onbepaald aangroeien van het aantal zijden, werd er niets bewezen over de *ligging* of *vorm* van den omtrek; de uitdrukking „grens" zooals die in dit verband gebruikelijk is, heeft niets uit te staan met stand of vorm; ze slaat alleen op de grootte, 't gaat niet aan te zeggen dat de omtrek van een veelhoek van dien des cirkels in stand of vorm niet minder verschilt dan eenige aan te wijzen hoeveelheid; alles wat bewezen is, slaat op de lengte. *In de sterometerie te constateeren* zonder bewijs, dat de inhoud van dat onregelmatig lichaam 't welk tusschen de twee andere ligt, en waarvoor we op dit standpunt geen uitdrukking hebben, kleiner gemaakt kan worden dan eenige aan te wijzen grootheid, omdat zijn grondvlak zoo klein gemaakt kan worden, is niets dan een *aanname.* 't Zelfde geldt voor het oppervlak.

Ook G. W. Greenwood tapt uit hetzelfde vaatje. Hij komt in de eerste plaats op tegen het gebruik van dit axioma bij het begin der meetkunde. „Dingen, die aan een zelfde ding gelijk zijn, zijn onderling gelijk". Als de leerlingen eenmaal in de algebra krijgen: $a = b$, dan beteekent dit dat deze letters hetzelfde getal aanduiden, en dat het eene voor het andere in een vorm mag gebruikt worden. Maar in de meetkunde ziet die gelijkheid der meetkunde op dingen waarvan de leerling, op dat standpunt, nog geen notie heeft. Veronderstelt, dat men op het bord twee rechthoeken teekent, verbonden door het teeken „gelijk". Wat zou dat beteekenen? *De leerlingen verwarren dikwyls gemeenzaamheid met een notatie met begrip van het idee, dat in de notatie ligt.*

„Het geheel is grooter dan een deel er van". Dit is louter de definitie van deel van eindige grootheid, en leert niet meer dan dit gezegde: „een lichaam waar men door heen kan zien is doorzichtig". C. A. Cikot.

6. *Nog eens over „Geometrographie".*

In no. 4 van den loopenden jaargang van de „Unterrichtsblätter" neemt Holzmüller de Geometrographie van Lemoine onder handen. Een eerste bezwaar geldt het optellen van het aantal bewerkingen, waarbij men operaties gelijk stelt, die dat niet zijn. Bij het trekken van een lijn door twee gegeven punten redeneert Lemoine zóó:

„eerst moet de liniaal door een punt gelegd worden, dat is ééne bewerking; dan moet ze draaien om dat punt, tot ze door het andere gaat, samen twee operaties." Holzmüller zegt dat die twee bewerkingen niet gelijk staan; heeft men zekerheid dat bij bedoeld draaien het contact met het eerste punt behouden blijft? Op grond van zijn ondervinding, opgedaan bij het bezoeken van de teekenzaal aan een vakschool (machine bouwschool in Hagen) gedurende 23 jaar, en bij het dagelijks zelf teekenen, schat hij de moeielijkheid van de tweede operatie twee à driemaal zoo groot als die van de eerste.

Een tweede bezwaar van hem (dat een kind begrijpen kan) is, dat de nauwkeurigheid waarmee een punt door de snijding van twee geteekende lijnen bepaald wordt, een functie van den hoek tusschen de lijnen is, en hiermede houdt Lemoine geen rekening.

Op de vakscholen houdt men er contrôle-constructies op na, en komt men zoodoende tot een vereffening van fouten, even als bij geodetische metingen; men bereikt dus de nauwkeurigheid niet door minder, maar door meer constructies, die elkaar contrôleeren, zooals men dat ook in de natuurwetenschappen doet. Men zal dus, wil het nieuwe vak betrouwbaar zijn, het moeten verbeteren, waardoor zijn hooggeroemde eenvoud, en daarmee zijn waarde voor de school, geducht lijden zal. (Met welgevallen geven we hier de critiek weer van een autoriteit als Holzmüller, omdat er menschen zijn die meenen, dat de jeugd tegenwoordig nog te weinig te leeren heeft, dat onderdeelen als: Geometrographie, nieuwere meetkunde van den driehoek, Nomographie, enz., enz., ook op de middelbare scholen onderwezen dienen te worden!)

C. A. Cikot.

7. *Een cirkelsegment wordt met zijn koorde verticaal gezet. Te bewijzen dat de tijden, noodig om langs de verschillende koorden uit het hoogste punt naar den omtrek te glijden, gelijk zijn, als de hoek tusschen de raaklijn in het hoogste punt en den horizon gelijk is aan den wrijvingshoek op de hellende koorden.*

Bewijs. Straal van den cirkel $= R$, hoek tusschen een willekeurige koorde en de verticale $= \alpha$, dan is de lengte van de eerste $= 2 R \cos(\alpha + \phi)$; de versnelling op die koorde $a = \frac{g \cos(\alpha + \phi)}{\cos \phi}$; uit de formule: $t^2 = \frac{2 s}{a}$ volgt

dat de tijd onafhankelijk van α is. (*Mathematical Gazette.*)

Uit deze eigenschap kan men de rechte lijn van kortsten valtijd opmaken tusschen een punt en een lijn in een verticaal vlak, of omgekeerd, als men ook rekening houdt met de wrijving. C. A. Cikot.

8. *Als men de hoogten* AA′, BB′, *enz. van een tetraëder* ABCD, *door de hoekpunten heen verlengt met stukken* AA″, BB″, *enz., omgekeerd evenredig met die hoogtelijnen, heeft het tetraëder* A″B″C″D″ *hetzelfde zwaartepunt als* ABCD.

Bewijs. Als α, β, γ en δ de zijvlakken zijn, kunnen we stellen: $AA'' = \alpha p$, $BB'' = \beta p$, enz. De afstanden van A″, B, enz. tot BCD zijn: $AA' + \alpha p$, $-\beta p \cos(\beta,\alpha)$, $-\gamma p \cos(\gamma,\alpha)$ en $-\delta p \cos(\delta,\alpha)$, waarbij bijv. (β,α) voorstelt den hoek tusschen de vlakken α en β. Door projecteeren vindt men: $\alpha = \beta \cos(\beta,\alpha) + \gamma \cos(\gamma,\alpha) + \delta \cos(\delta,\alpha)$, derhalve vindt men, door toepassing van het momenten-theorema ten opzichte van het vlak BCD voor den afstand van het nieuwe zwaartepunt tot genoemd vlak: $\frac{1}{4}$ AA′; een overeenkomstigen afstand vindt men ten opzichte van de andere zijvlakken, derhalve zijn de twee zwaartepunten identisch.
C. A. Cikot. (*Mathesis, 1888.*)

9. *Als een rechte lijn van bepaalde lengte tusschen twee elkaar snijdende lijnen glijdt, beschrijven het middelpunt van den omgeschreven cirkel en het hoogtepunt van den gevormden driehoek cirkelbogen.*

Bewijs. Alle omgeschreven cirkels zijn gelijk, daarom liggen hun middelpunten op een cirkel die het standvastige hoekpunt tot middelpunt heeft. Is de lengte van de bewegende lijn a en de standvastige hoek A, dan is de afstand van die hoekpunt tot het hoogtepunt $a \operatorname{cotg} A =$ constant, derhalve doorloopt het hoogtepunt een cirkelboog.
C. A. Cikot. (*Mathesis 1888*).

10. *Als de som van twee veranderlijke grootheden maximum is als die twee grootheden gelijk zijn, dan is tegelijkertijd de som van hun omgekeerden minimum.*

Bewijs.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{4(x+y)}{(x+y)^2-(x-y)^2} = \frac{4}{(x+y) - \dfrac{(x-y)^2}{x+y}}.$$

De eerste term van dezen noemer is, volgens de veronderstelling, maximum, voor $x = y$, en de tweede minimum,

dus is de geheele noemer maximum, m. a. w. de waarde van de breuk heeft haar minimum bereikt. (*Mathesis 1888*).

C. A. Cikot.

11. In het November-nummer van de „Enseignement Mathématique" is een circulaire opgenomen van Bourlet, „professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis" aan zijn collega's, waarin hij zegt dat hij, naar aanleiding van de uitnoodiging van hooger hand aan de leeraren gedaan om het onderwijs in de meetkunde op een nieuwe leest te schoeien, een bewerking onder handen heeft van het boek van Méray (zie vorige afl.), met het oog op de invoering op de scholen. Zelf noemt hij dit een „travail délicat."

C. A. Cikot.

12. Op het congres, in September l.l. in Meran gehouden door Duitsche geneeskundigen, natuurkundigen en wiskundigen, hebben de Oostenrijksche professoren Czuber en Hocevar ook voor hun middelbare scholen aangedrongen op de invoering van de Infinitesimal-rekening. Ook prof. Klein drong in zijn rapport over het wiskunde-onderwijs, nog eens op die invoering aan. C. A. Cikot.

13. *Over den aangeschreven vierhoek en den raaklijnen vierhoek.*

In de *Mémoires de Paris* 1725 heeft Pitot naar het schijnt voor het eerst de stelling uitgesproken, dat voor een omgeschreven $2n$-hoek de som der zijden van oneven rang gelijk is aan die der zijden van even rang. Sinds vond deze stelling, althans voor een raaklijnen vierhoek, haar plaats in de elementaire planimetrie. Ook de omgekeerde van laatst genoemde werd opgenomen, waarvoor algemeen een indirect bewijs gegeven werd. In den laatsten tijd hebben Gérard in den *Bulletin de Math. élem.* (1900) en Fricke in de *Unterrichtsblätter für Math. und Naturw.* (1903) eenzelfde direct bewijs gegeven, dat ook bij ons wel bekend mag zijn.

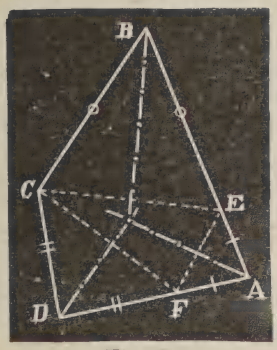


Fig. 1.

Zij (fig. 1) $AB + CD = AD + BC$, dan is dus $AE = AF$, zoo $BE = BC$ en $DF = DC$ is.

De deellijnen der hoeken A, B, D gaan nu door één punt, daar deze lijnen tevens middelloodlijnen in $\triangle$ FEC zullen wezen.

Een zelfde bewijs kan gegeven

worden voor de andere typen van raaklijnen-vierhoeken, die bij het onderwijs te veel over het hoofd gezien worden en toch zeer geschikte oefeningen voor de leerlingen geven. Reeds meer dan een halve eeuw geleden schreef Steiner (*Crelle's Journal* XXXII, *Ges. Werke* II, bl. 383): „Dass dem Viereck nur dann ein Kreis sich einschreiben lasse, wenn die Summen der Gegenseiten gleich sind ist mangelhaft und unvollständig; es ist in zwei Hinsichten nur ein Bruchstück. Man dachte dabei bloss an das convexe Viereck und selbst bei diesem nur an den Fall, wo der Kreis keine Seite in ihrer Verlängerung berührt. Da man aber schon beim Dreieck diese Beschränkung aufgehoben und statt des einen eingeschriebenen Kreises vier eingeschriebene Kreise betrachtet hat, so muss auch dem Viereck eine freiere Auffassung zukommen."

Inderdaad gaat men de verschillende minder gebruikelijke typen na (fig. 2, 3, 4), dan blijkt dat altijd de betrekking geldt $AB - BC + CD - DA = 0$, mits die lijnen positief of negatief nemend, waarbij men den vierhoek rondgaande in de richting ABCD den cirkel rechts of links heeft. Gemakkelijk gaat men na, dat voor die gevallen ook het vorige bewijs van toepassing is en heeft men dus een direct bewijs voor de stelling: een vierhoek is raaklijnen-vierhoek zoo de som (het verschil) van twee overstaande zijden gelijk is aan de som (het verschil) der beide andeer zijden.

Fig. 2.

¶ Dat een vierhoek ingeschreven is als de sommen der overstaande hoeken gelijk zijn, wordt ook steeds indirect bewezen. Belangrijk is het daarom met het directe bewijs kennis te maken, dat de genoemde schrijvers voor deze stelling geven, welke stelling nog niet voorkomt in de *Elementen van Euclides.*

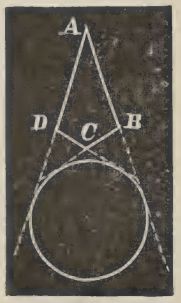


Fig. 4.

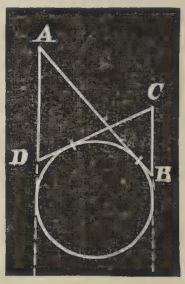


Fig. 3.

Zij (fig. 5) $A + C = B + D$. De middelloodlijnen MW en MV van AB en CD zullen in △ UVW deellijnen zijn. Nu is △

AUD gelijkbeenig, daar A — B = D — C is. De middelloodlijn van AD is dus ook deellijn van ∠ VUW en gaat dus door M, welk punt dus evenver van A, B, C en D verwijderd is.

Een andere stelling, die ook altijd indirect bewezen wordt, is op overeenkomstige wijze aan te toonen. Wij bedoelen de stelling: de m. p. der toppen van de driehoeken, die aan denzelfden kant op dezelfde basis staan en een gelijken tophoek hebben, is een cirkelboog, welk theorema slechts een ander geval is van de vorige stelling. Let men er op, dat in den convexen vierhoek ABCD (fig. 6) ∠ A de hoek is, welken AD in positieven zin draaien moet om AD met de lijn AB te doen samenvallen, dan zou men in den gekruisten vierhoek ABCD ook de aangeteekende hoeken A, B, C, D moeten noemen, welker som dan 360° is. Zoo nu hier A + C = B + D is, zal de vierhoek ingeschreven zijn. Q.

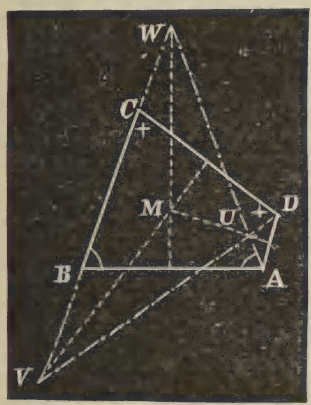


Fig. 5.

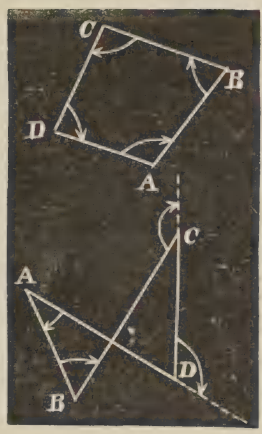


Fig. 6.

14. *Het optreden van een geïsoleerd punt bij meetkundige plaatsen.*

Bepaalt men analytisch een meetkundige plaats, dan vindt men dikwijls een eindvergelijking, waaraan een geïsoleerd punt voldoet, welks optreden zeer paradoxaal schijnen kan. Zoo treedt dit op bij een ellips als de voetpuntslijn van het middelpunt bepaald wordt of als de m. p. van de middens der koorden PQ gezocht wordt, die uit het middelpunt M onder een rechten hoek gezien worden. Deze laatste is:

$$(a^2 + b^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2)^2 = a^2 b^2 (a^4 y^2 + b^4 x^2),$$

waaraan als geïsoleerd punt de oorsprong voldoet.

Hoe dit te verklaren?

De lijnen MP en MQ worden beiden analytisch ook gegeven door de middellijn $y = x\sqrt{-1}$, waarbij toch het product der richtingscoëfficiënten -1 is. Het midden der imaginaire koorde PQ is dan de oorsprong.

Q. *Neuberg, Mathesis 1904, Note 20.*

15. *Uitbreiding eener bekende eigenschap der ellips.*

Zijn R en R^1, N en N^1 de punten, waar de raaklijn en de normaal in een punt P (x_1, y_1) eener ellips met brandpunten F en F^1 de assen snijden. De vergelijkingen van raaklijn en normaal zijn nu:

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2, \quad b^2 x_1 (y - y_1) = a^2 y_1 (x - x_1).$$

Hieruit vindt men:

$$OR = \frac{a^2}{x_1}, \quad OR^1 = \frac{b^2}{y_1}, \quad ON = \frac{c^2 x_1}{a^2}, \quad ON^1 = \frac{c^2 y_1}{b^2},$$

waaruit volgt: $OR.\ ON = c^2$ en $ON^1.\ OR^1 = -c^2$, d. i

N en R verdeelen FF^1 harmonisch en de omgeschreven cirkel van $\triangle$ FPF^1 snijdt de kleine as in R^1 en N^1.

Bij dit bewijs echter is *geen gebruik* gemaakt van het gegeven, dat P een punt der ellips is. Wordt dit losgelaten, dan zijn de twee lijnen de poollijn van P en de loodlijn uit P op deze poollijn neergelaten. Voor de punten waar deze lijnen de assen snijden gelden dus ook de genoemde eigenschappen.

Q. *Barisien, Mathesis 1904. Note 1.*

16. *De vergelijking der asymptoten eener kegelsnede.*

Zij de vergelijking $K = A_1 x^2 + 2 B x y + \ldots = 0$, dan wordt de vergelijking op evenwijdige assen door het middelpunt:

$$A_1 x^2 + 2 B x y + A_2 y^2 - \frac{\triangle_3}{\triangle_2} = 0,$$

waarin

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} B & A_1 \\ A_2 & B \end{vmatrix}, \triangle_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B & C_1 \\ B & A_2 & C_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{vmatrix}.$$

Op deze nieuwe assen is de vergelijking der asymptoten

$$A_1 x^2 + 2 B x y + A_2 y^2 = 0,$$

of ook

$$\left(A_1 x^2 + 2 B x y + A_2 y^2 - \frac{\triangle_3}{\triangle_2} \right) + \frac{\triangle_3}{\triangle_2} = 0.$$

Door verplaatsing naar de oorspronkelijke assen wordt de vergelijking:

$$K + \frac{\triangle_3}{\triangle_2} = 0.$$

Q. *Pinkerton, Math, Gaz. 1905. Note 165.*

18. *Men verlengt de zijden* AB, BC, CA *van* △ ABC *met stukken* BC_1, CA_1, $AB_1 = k.\,AB$, $k.\,BC$, $k.\,CA$. *Als* $A_2, B_2\,C_2$ *de middens zijn van* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, *dan hebben de driehoeken* ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *hetzelfde zwaartepunt.*

Uit de figuur volgt, dat als de inhoud van △ ABC = I gesteld wordt, en Z zijn zwaartepunt is:

$$\triangle\, AA_1B_1 = k^2\, I,$$
$$\triangle\, AB_1Z = \tfrac{1}{3}\, k\, I,$$
$$\triangle\, AZA_1 = \tfrac{1}{3}\,(1 + 2\,k)\, I, \text{ dus}$$
$$\triangle\, A_1ZB_1 = \tfrac{1}{3}\,(1 + 3\,k + 3\,k^2)\, I.$$

Zoo ook de △△ B_1ZC_1 en C_1ZA_1, waaruit volgt, dat Z het zwp. van △ $A_1B_1C_1$ is.

A_2 zal gelegen zijn op de lijn, die de middens der zijden van AB en AC verbindt, waaruit de stelling in verband met de vorige onmiddellijk volgt.

Q. *Barisien, Mathesis 1904. Question 1455.*

18. *Zijn* ABCD *een koordenvierhoek,* I_1, r_1 *enz. de middelpunten en stralen der cirkels beschreven in de driehoeken* BCD, *enz., dan is* $I_1I_2I_3I_4$ *een rechthoek, en* $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

Zoo P, R, Q, S de middens zijn der bogen DC, CB, BA, AD, dan is $PI_2 = PD = PC = PI_1$, dus halveert PQ loodrecht I_1I_2 en ook I_3I_4. Eveneens zijn I_2I_3, I_1I_4 loodrecht op RS. Dus is $I_1I_2I_3I_4$ een rechthoek, daar PQ ⊥ RS staat. Trekt men door I_1 enz. lijnen evenwijdig AC en BD, dan snijden deze elkander in punten, die op PQ en RS gelegen zijn, en dus een ruit insluiten, weiks hoogte zoowel $r_1 + r_3$ als $r_2 + r_4$ is.

Q.

Tucker, Repr. Educ. Times. New Series VII, 1905. 15115.

19. *Door het punt* O *in het vlak van* △ ABC *trekt men een rechte, die* BC *in* P, CA *in* Q, AB *in* R *snijdt. Als dan* P^1, Q^1, R^1 *ten opzichte van* O *symmetrisch gelegen zijn met* P, Q, R, *dan zullen* AP^1, BQ^1, CR^1 *door één punt gaan.*

Zoo CR^1 AB in S ontmoet, dan is $C\,(R\,A\,B\,T) = C\,(R\,Q\,P\,R^1) = C\,(R^1\,P\,Q\,R) = C\,(R\,P^1\,Q^1\,R^1)$. Daar de eerste

en laatste bundel een straal gemeen hebben zoo zullen de lijnen AP^1, BQ^1, CR^1 door één punt gaan.

Q. *Blaikie, Repr. Educ, Times. New Series VII, 1905. 15584.*

20. *In een gelijkzijdigen driehoek* ABC *zijn* M, N, O *de spiegelpunten van een punt* P *ten opzichte van de zijden. De lijnen* AM, BN, CO *gaan door eén punt.*

Zoo X, Y, Z de spiegelpunten van de hoekpunten zijn, dan snijden AM en PX elkander in een punt A_1, gelegen op BC enz. Snijden nu XP, YP, ZP de overstaande zijden in G, H, K, dan is $ZG \times YK \times XL = YG \times ZH \times XK$; daar echter $ZG : GY = BA_1 : A_1C$ enz., is ook

$$BA_1 \times CB_1 \times AC_1 = BC_1 \times AB_1 \times CA_1.$$

Q.

Hain, Repr. Educ. Times, New Series VII, 1905 10349.

21. *Uitbreiding van de stelling van Wallace.*

Wordt een $\triangle$ ABC met zijn Wallace-lijn op een willekeurig vlak geprojecteerd, dan komt men tot een stelling door Steiner in zijn artikel *Développement d'une série de theorèmes relatifs aux sections coniques* (Ges. Werke I, 191) meegedeeld: Als men een punt P eener omgeschreven kegelsnede van $\triangle$ ABC projecteert op de zijden volgens lijnen, die evenwijdig loopen met de toegevoegde richtingen van deze zijden, dan zijn de voetpunten collineair.

Van deze eigenschap geeft Neuberg een analytisch bewijs voor het geval de kegelsnede een gelijkzijdige hyperbool is.

Q. *Neuberg, Mathesis 1904., bl. 189.*

22. *Eigenschap van een parallelogram.*

Een aardige eigenschap doet in de wiskundige tijdschriften de rondte en is reeds voor de tweede maal in *Mathesis* aangekomen.

De achthoek gevormd door de ach lijnen, die de middens der zijden van een parallelogram met de uiteinden van de overstaande zijden vereenigen is gelijk aan een zesde van het parallelogram.

Q. *Mathesis 1892. Question d'Examen 515.*
1904. Question d'Examen 1182:

23. *In een driehoek is de som der kwadraten der afstanden van het middelpunt van den 9punts-cirkel tot de middelpunten der in- en aangeschreven cirkels gelijk aan*

21maal het kwadraat van den straal van den omgeschreven cirkel verminderd met de som der kwadraten der zijden.

Voor de genoemde som vindt men door de stelling van Feuerbach:

$$R^2 + R(r_a + r_b + r_c - r) + (r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2),$$

wat met behulp der betrekking

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

en de formules voor de stralen der rakende cirkels tot de genoemde waarde te herleiden is.

Telkens worden weder nieuwe betrekkingen tusschen de elementen van een driehoek gevonden en de lijst (*Recueil de 273 formules*) in 1893 bij Nony te Parijs verschenen zou thans heel wat uitgebreid kunnen worden.

Q. *Barisien, Mathesis 1904. Question 1474.*

24. *Het kwadraat van een getal van twee cijfers, waarvan het eerste een 5 is,* kan eenvoudig aldus gevonden worden:

$$53^2 = (25 + 3) \times 100 + 3^2 = 2809,$$
$$57^2 = (25 + 7) \times 100 + 7^2 = 3249.$$

Q. *Mathesis 1905. Question d'Examen 1208.*

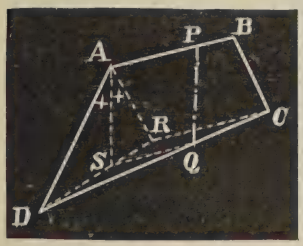
25. *Als a, b, c rekenkundig, b, c, d meetkundig en c, d, e harmonisch evenredig zijn, dan zullen ook a, c, e meetkundig evenredig wezen.*

Uit $2b = a + c$, $c^2 = bd$, $2ce = d(c + e)$ volgt $c^2 = ae$.

Q. *Vuibert. Mathesis 1905. Question d'Examen 1192.*

26. *Eigenschap van een vierhoek.*

In den vlakken of scheeven vierhoek ABCD worden AB en CD in P en Q zoodanig verdeeld, dat AP : PB = AD : BC = DQ : QC; de lijn PQ zal evenwijdig loopen met de lijn, die den hoek tusschen AD en BC halveert. Deze stelling, die Darboux in de *Math. Gaz.* als een remarque minuscule meedeelt is al meermalen gepubliceerd. Zoo door Steggall in de *Proc. Ed. Math. Soc.* 1892, waar ook Mackay nog oudere vindplaatsen noemt.



De stelling kan als volgt bewezen worden.

Voltooi het parallelogram ABCR (fig.), trek RD en halveer ∠ RAD door AS. QS zal dan // en = AP wezen, waaruit het gestelde volgt.

Zoo A en B samenvallen wordt deze eigenschap een bekende stelling van den driehoek.

Q. *Math. Gaz. 1905. Note 167.*

27. *Uitbreiding eener eigenschap van een rechthoekig viervlak.*

Zijn van het viervlak TABC de ribben TA, TB, TC onderling loodrecht. Als dan A_1, B_1, C_1 de middens der zijden van $\triangle$ ABC zijn, dan is de som der zijden van den drievlakshoek $TA_1B_1C_1$ gelijk 180°, zooals wel bekend is.

Hetzelfde zal het geval zijn als de punten A_1, B_1, C_1 zoo gekozen zijn, dat AA_1, BB_1, CC_1 door een punt N[1] gaan. Men kan dan toch in vlak BTC door A_1 een lijn B_2C_2 trekken, die in A_1 gehalveerd wordt. Verder in het vlak BTA een lijn B_2A_2, die haar midden P op TC_1 heeft. Vereenigt men nu A_2 met C_2, dan zal deze lijn door TB_1 in Q gehalveerd worden, omdat de lijnen A_2A_1, B_2Q, C_2P allen gaan door het punt, waar TN het vlak $A_2B_2C_2$ snijdt.

Ten opzichte van het viervlak $TA_2B_2C_2$ kan dus de eerstgenoemde stelling worden toegepast.

Q. *Lienard, Mathesis 1905, bl. 101.*

28. *Goniometrische betrekkingen.*

a). $\sin 5 \sin 15 \sin 25 \sin 35 \sin 45 \sin 65 \sin 75 \sin 85 = \frac{\sqrt{2}}{512}$.

Gebruik makende van de betrekkingen $\sin 5 \sin 85 = {}^1/_2 \cos 80$ enz, laat zich het product herleiden tot:

$$\frac{\sqrt{2}}{128}(\cos 100 + \cos 60)(\cos 100 + \cos 20) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{56}(4 \sin^3 10 - 3 \sin 10 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{256}(1 - \sin 30) = \frac{\sqrt{2}}{512}.$$

b). *Als in een driehoek $a + c = 2\,b$ is en dus de zijden een rekenkundige reeks vormen dan bestaan de betrekkingen:*

(1) $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = 3$,

(2) $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = 2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B$,

(3) $2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} B$.

Daar steeds $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$, zal in den bedoelden driehoek $3 \sin B = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$ wezen of $3 \cos \frac{1}{2}(A + C) = 2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C$, waaruit (1) volgt.

Uit deze formule in verband met de algemeene betrekking $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C$ volgt (2).

Daar altijd $\sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$

is, heeft men onmiddellijk $\sin B = 4 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$, wat met (3) overeenkomt.

Q. *Zeitschr. f. math. und naturw. Unt. 1905. bl. 283.*

29. *In een boldriehoek kan de som der medianen meer dan de som der zijden wezen.*

In een vlakken driehoek is de eerste som steeds minder dan de tweede; Catalan heeft gemeend, dat deze stelling ook voor den bolvormigen gold. Maar als de drie zijden stomp zijn is de stelling onjuist.

Zij in den boldriehoek ABC AD de mediaan van BC, welke evenals AB en AC grooter dan 90° zal zijn. AB, AD, AC zullen elkander na verlenging snijden in het punt E, diametraal gelegen met A. Maak DF = DE, dan zal BF = CE wezen. In den boldriehoek BEF is nu

$$2(\pi - \alpha) < (\pi - b) + (\pi - c), \text{ of}$$

$$b + c < 2\alpha,$$

als α de mediaan AD voorstelt. Bijgevolg:

$$a + b + c < \alpha + \beta + \gamma.$$

Q. *A. C. Mathesis 1905. Note 14.*

30. *In een boldriehoek zij de mediaan α naar de zijde a getrokken gelijk aan het supplement van de helft dezer zijde. Het spherisch exces van dien driehoek is dan 180°, terwijl de straal R van zijn omgeschreven cirkel gegeven is door*

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} b \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c.$$

(*Concours de l'Enseignement moyen en Belgique, 1904.*)

De formule:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(b + c) \cos \frac{1}{2}(b + c)}{\cos \frac{1}{2} a} = \frac{\cos^2 {}^1/_2\, b + \cos^2 \frac{1}{2} c - 1}{\cos \frac{1}{2} a},$$

maakt voor $\pi = \pi - \frac{1}{2} a$ den teller der breuk:

$$\frac{\cos^2 {}^1/_2\, a + \cos^2 {}^1/_2\, b + \cos^2 {}^1/_2\, c - 1}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \cos \tfrac{1}{2} E$$

nul. Dus E = 180°.

De tweede betrekking volgt nu uit de algemeene formule:

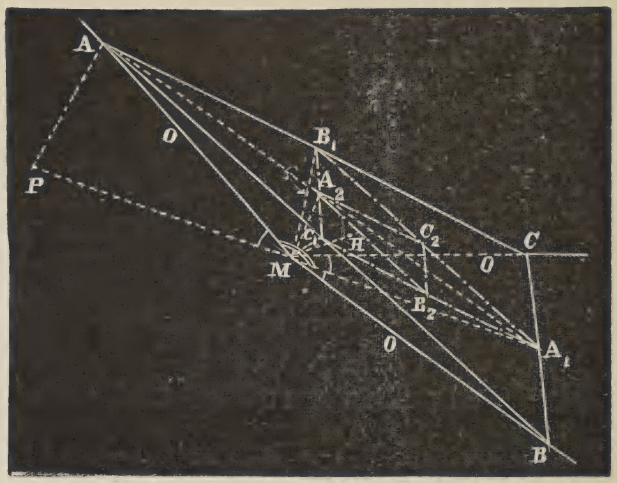
$$\operatorname{cotg} R = \sin \tfrac{1}{2} E \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} b \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c.$$

Toch kunnen deze uitkomsten ook meetkundig verklaard worden.

Verleng de bogen AC en BC, tot zij elkander in C^1 snijden. Zoo nu AD de mediaan is, wordt $AD = C^1D$, dus $\angle C^1AD = \angle AC^1D = \angle ACD$. Dus zijn de hoeken CAD en

ACB te samen groot 180°, en eveneens de hoeken BAD en ABC. Het spherisch exces is dus 180°.

Zij nu M het middelpunt (zie fig.) van den bol, dan zal de deellijn van $\angle$ CMB de lijn CB halveeren. Zijn nu A_1, B_1, C_1 de middens van BC, CA, AB, dan zal de projectie MP van MA op de genoemde deellijn gelijk aan MA_1 moeten wezen, daar gegeven is dat $\angle AMA_1 + \angle CMA_1 = 180°$. Snijdt nu AA_1 de lijn B_1C_1 in A_2, dan is $A_2P = \frac{1}{2} AA_1 = A_2A_1$, dus is $A_2M \perp MA_1$. Daar ook $MA_1 \perp B_1C_1$ is, zal $MA_1 \perp$ vlak B_1MC_1 wezen. Maar $MA_2 = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} B_1C_1$ zijnde, is $\angle B_1MC_1 = 90°$ en vormen MA_1, MB_1, MC_1 een rechthoekig assenstelsel of m. a. w. de bogen, die de middens der bogen in den bedoelden boldriehoek verbinden zijn 90°.



Zij nu H de projectie van M op het vlak ABC, dan is H het hoogtepunt van $\triangle A_1B_1C_1$ en het middelpunt van den omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC. Men heeft nu:

$$\text{cotg R} = \frac{MH}{AH} = \frac{4.\,MH.\,\triangle ABC}{AB.\,BC.\,CA} = \frac{16.\,MH.\,\triangle A_1B_1C_1}{8.\,AB_1.\,BC_1.\,CA_1} =$$

$$\frac{6.\,\text{vol.}\,OA_1\,B_1C_1}{AB_1.\,BC_1.\,CA_1} = \frac{MA_1}{CA_1} \times \frac{MB_1}{AB_1} \times \frac{MC_1}{BC_1} =$$

$$\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,a\ \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,b\ \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,c.$$

Q. *Lez, Lienard. Mathesis 1905. Question 1490.*

31. *Symbolische vergelijkingen.*

Als uitvinders der symbolische vergelijkingen in de

analytische meetkunde worden nog al eens genoemd in Frankrijk Bobillier en in Duitschland Plücker. Eerder echter dan deze wiskundigen heeft Lamé symbolische vergelijkingen gebruikt. In zijn *Examen des differentes methodes employées pour resoudre les problèmes de Geometrie* (1818) schrijft hij:

„Je supposerai d'abord que les trois lieux géometriques soient du même degré D. Je désignerai par $e = 0$, $e' = 0$, $e'' = 0$ leurs équations.

..... l'équation $m e + m' e' = 0$ pourra représenter tout lieu géométrique du degré D passant par les intersections des lignes ou surfaces représentées par les équations $e = 0$ et $e' = 0$."

Hierin is dus reeds eenvoudig en duidelijk de methode der symbolische vergelijkingen uitgesproken.

Q. *Cantor. Intermediaire 1905. Question 2858.*

32. *„Over de definitie van den vlakken inhoud van een gebogen vlak."* [1])

Onder dezen titel geeft Sibirani in de Juli-Augustus-aflevering 1905 van het „Periodico di Matematica" een belangwekkend historisch overzicht van de wijze, waarop die definitie in de wiskunde zich heeft ontwikkeld. In 't volgende geven wij de hoofdtrekken van dat overzicht weder.

De oude Grieksche wiskundigen, die zich hoofdzakelijk beperkten tot de studie van cilinder, kegel en bol, gaven geen algemeene bepaling van den V. I. van een gebogen vlak. Archimedes gaat uit van het volgende postulaat: „Indien van twee oppervlakken, die beide concaaf zijn ten opzichte van een zelfde plat vlak, waardoor zij worden begrensd, het eerste geheel omsloten wordt door het tweede, dan heeft het eerste kleiner V. I. dan het tweede". Definieert men nu den V. I. van een concaaf gebogen vlak zoodanig, dat aan genoemd postulaat voldaan wordt, dan volgt hieruit, dat men dien V. I. kan beschouwen als de gemeenschappelijke limiet van den V. I. van in- en omgeschreven concave veelvlakken.

Maar deze wijze van definieeren gaat blijkbaar niet door voor concaaf-convexe oppervlakken, omdat voor deze het postulaat van Archimedes niet meer geldt.

---

[1]) „Sulla definizione di area di una superficie curva". Om alle misverstand te voorkomen, vertalen wij „area" (fransch: „aire") door „vlakke inhoud" (V. I.).

In de wiskundige verhandelingen, die aan de helft der vorige eeuw voorafgaan, zoekt men te vergeefs naar een strenge definitie. Toch springt de noodzakelijkheid daarvan in 't oog. Immers, in letterlijken zin kan men niet spreken van den *vlakken* inhoud van een gebogen vlak, daar geen enkel deeltje van dit laatste, hoe klein dan ook, kan samenvallen met een deel van een plat vlak.

De beschouwingen waardoor Lagrange, Lacroix e.a. a priori trachten te *bewijzen*, dat de V. I. van het oppervlak $z = f(x, y)$ gelijk is aan de limiet der som van oneindig vele raakvlakjes wier analytische uitdrukking wordt voorgesteld door $\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2}\, dx\, dy$, hangen dan ook in de lucht, omdat zij den grondslag eener scherp omlijnde definitie missen.

In latere werken vindt men eene definitie, die analoog is met de algemeen aangenomen bepaling der lengte eener kromme lijn. Serret in zijn „Cours de calcul différentiel et intégral" definieert als volgt: „Zij gegeven een deel van een oppervlak begrensd door een gesloten kromme C; onder den V. I. van dit oppervlak verstaan wij de limiet S, waartoe nadert de V. I. van een ingeschreven veelvlak, gevormd door driehoekige vlakjes, en begrensd door een gebroken lijn, die de kromme C tot limiet heeft." Dan tracht Serret aan te toonen, dat die grenswaarde S bestaat, en dat zij onafhankelijk is van de wet, volgens welke die driehoekige zijvlakjes tot nul naderen. Schwarz was de eerste, die in een brief aan Genocchi op de onbetrouwbaarheid dezer bepaling wees. Op verzoek van Hermite zond hij dezen eene korte uiteenzetting, welke onder den titel: „Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe", door Hermite is opgenomen in zijn „Cours" van het 2e semester 1881 – 2. Daarin toont Schwarz door een eenvoudig voorbeeld onwederlegbaar aan, dat de V. I. van een ingeschreven veelvlak elke gegeven waarde kan te boven gaan, indien dit veelvlak niet aan zekere beperkende voorwaarden voldoet. Ten bewijze verdeelt hij een regelmatig cilindervlak in n gelijke deelen door vlakken loodrecht op de as. In grondvlak, bovenvlak en alle doorsneden construeert hij regelmatige m-hoeken, en wel zóó, dat elke volgende m-hoek over een hoek van $\frac{180^\circ}{m}$ ten opzichte van

den voorgaanden om de cilinder-as is gedraaid. Verbindt men nog elk der m-hoekpunten met de 2 nabijzijnde hoekpunten op de voorgaande doorsnede, dan verkrijgt men een ingeschreven netwerk van $m \times n$ congruente driehoekjes. Langs elementairen weg toont Schwarz aan, dat de som dier driehoekjes slechts dan tot den V. I. van den cilinder nadert, indien de verhouding $\frac{n}{m}$ eindig blijft, terwijl m en n onbepaald toenemen. Is echter limiet $\frac{n}{m^2}$ eindig, dan is de limiet der som afhankelijk van de grenswaarde van $\frac{n}{m^2}$; eindelijk, is limiet $\frac{n}{m^3}$ eindig, dan heeft die som geen grenswaarde meer, daar zij elke gegeven waarde kan te boven gaan [1]).

Terecht besluit Schwarz dus dat de definitie van Serret moet worden gewijzigd door toevoeging van beperkende voorwaarden. Maggi heeft deze laatste onderzocht voor oppervlakken, die in ieder punt eene normaal hebben, welke doorloopend van richting verandert; en hij komt tot het besluit, dat de limiet van de som der ingeschreven driehoekjes slechts dan den V. I. van een gebogen vlak kan voorstellen, indien de hoek, dien de loodlijn op ieder driehoekig vlakje maakt met de normaal in ieder punt van 't onderspannen segment, tot nul nadert tegelijk met den straal van den omgeschreven cirkel van 't driehoekje.

Onnoodig is 't te zeggen, dat de bepaling van Serret door die toevoeging van geen practisch belang meer is, en de latere wiskundigen hebben ze dan ook algemeen laten varen. Algemeen aangenomen is thans de definitie van Hermite, waartoe men komt als volgt. Neem in 't XY-vlak een oppervlakje $\triangle\sigma$, en breng door den contour een cilindervlak evenwijdig aan de Z-as. Dit snijdt uit het gebogen vlak een elementje $\triangle\tau$. Brengt men in een punt van $\triangle\tau$ het raakvlak aan, dan zal ook hieruit door 't cilindervlak een elementje worden gesneden. De limiet der som van al deze laatste elementjes — die niet eens aaneensluitend zijn — is de vlakke inhoud van 't gebogen vlak [2]).

---

[1]) Een analoog bewijs kan men leveren voor een deel van een boloppervlak.

[2]) In plaats van cilindervlakjes, zou men ook elementaire kegelvlakjes kunnen construeeren uit eenzelfde punt als top.

De definitie van Jordan is niet essentieel verschillend van die van Hermite, al is de wijze van voorstelling eenigszins anders. Zich beperkend tot oppervlakken, die overal een bepaald, doorloopend veranderlijk raakvlak bezitten, stelt hij daarvan de loopende coordinaten voor als een functie van twee parameters u, v:

$$x = \Phi_1(u, v), \quad y = \Phi_2(u, v), \quad z = \Phi_3(u, v),$$

Verder stelt hij nog:

$$\xi = x_k + \left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)_k du + \left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)_k dv$$

$$\eta = y_k + \left(\frac{\delta y}{\delta u}\right)_k du + \left(\frac{\delta y}{\delta v}\right)_k dv$$

$$\zeta = z_k + \left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)_k du + \left(\frac{\delta z}{\delta v}\right)_k dv$$

waarbij $(x_k, y_k, z_k,)$ een vast punt op 't oppervlak is.

Wanneer nu u en v alle waarden doorloopen, gelegen binnen u_k, v_k en $u_k + du$, $v_k + dv$ (du en dv oneindig klein), dan zal (x, y, z) op 't gebogen vlak een vierhoekje S_k doorloopen, en tegelijk doorloopt (ξ, η, ζ) een vierhoekje T_k in 't raakvlak van (x_k, y_k, z_k). Daar nu de afstand der twee correspondeerende punten oneindig klein van de 2e orde blijft, zoo is 't aannemelijk, limiet ΣT_k te beschouwen als de V. I. van het gebogen vlak.

Zoo komt Jordan tot de analytische uitdrukking:

$\iint \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv$, waarin A, B, C de bekende functionaal-determinanten zijn.

Een andere volkomen juiste bepaling is die van Peano. Deze deelt het gebogen vlak in stukken, verplaatst die willekeurig in de ruimte, en projecteert ze dan op een plat vlak. De som van al die projecties is eene grootheid, die varieert met de wijze van verdeeling en den stand der stukken. De maximum-grens van die grootheid noemt Peano den V. I. van het gebogen vlak.

Aan die bepaling geeft hij nog een anderen vorm door de invoering van *bivectoren*. Onder een bivector wordt verstaan een vector, waarvan de grootte aanduidt het vlakke oppervlak omsloten door een vlakke gesloten lijn, terwijl zijn richting samenvalt met die der loodlijn op 't vlak der lijn. Nu behoort bij elke gesloten lijn l van

dubbele kromming een vlakke gesloten lijn l', die in zoodanig verband staat met l, dat de oppervlakken, omsloten door de projectien van l en l' op elk willekeurig plat vlak gelijk zijn. Onder den bivector van l verstaat men dan den bivector der equivalente vlakke lijn l'. Men kan derhalve spreken van de bivectoren van elk der stukken, waarin een gebogen oppervlak verdeeld wordt; en den V. I. van een gebogen vlak definieert Peano dus als „de maximumgrens van de som der bivectoren der deelen".

Bij al de tot nu toe gegeven bepalingen beschouwt men het gebogen vlak als de grens der som van vlakke figuren.

Maar onlangs heeft Minkowski eene definitie gegeven, die geheel daarvan abstractie maakt, en enkel afhangt van 't eenvoudiger begrip van *volumen*.

Zij F een oppervlak; om elk punt daarvan beschrijve men een bol met straal r. Zij $V(r)$ het volumen der laag, die aldus ontstaat. De grenswaarde van $\frac{V(r)}{2r}$ als r tot nul nadert noemt Minkowski den V. I. van F. Eene analoge definitie geeft hij voor de lengte eener willekeurige kromme. Men beschrijve om ieder harer punten een bol met straal r. Indien $V(r)$ het aldus ontstane volumen voorstelt, dan is de limiet van $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ de lengte der kromme.

Het groote voordeel dezer bepaling is, dat zij onafhankelijk is van het bestaan eener bepaalde normaal in elk punt van 't oppervlak. Ook is zij wel de getrouwste vertolking van de wijze, waarop wij ons gewoonlijk een oppervlak voorstellen: als een oneindig dunne laag. Tevens sluit zij zich geleidelijk aan bij de natuurkundige theorieën over grenslagen en molekulaire activiteitssfeer, over magnetische en electrische lagen. Maar beoordeelt men de deugdelijkheid eener wiskundige definitie van een gebogen oppervlak naar het nut, dat zij oplevert om met behulp daarvan de gedefinieerde grootheid ook numeriek te bepalen, dan lijkt de definitie van Minkowski minder bruikbaar.

Kan men ten slotte de onderzoekingen omtrent de definitie in casu als een volkomen afgewerkt geheel beschouwen? Het antwoord moet ontkennend luiden. Terwijl men uit de definitie der lengte eener kromme lijn de voorwaarden heeft kunnen afleiden, waaraan functiën moeten

voldoen, opdat de daardoor voorgestelde lijn kunne worden gerectificeerd, is 't nog niet gelukt uit een der definities van den V. I. van een gebogen vlak de noodige en voldoende voorwaarden af te leiden, waaraan analytische functies moeten voldoen, opdat de daardoor voorgestelde oppervlakken een bepaalden V. I. bezitten. Hier ligt dus nog een open veld voor nieuwe onderzoekingen.

Dr. J. Stein.

33. *Der Begriff des Statischen Momentes.*

In het *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, no. 40, 1905, blz. 1656, geeft George Perl als zijn meening te kennen, dat het begrip „Statisch moment" niet moet gedefiniëerd worden als het product van een kracht met een hefboomsarm, maar als het moment van een koppel. Want het buigend moment van een balk is dat van een koppel; het moment dat een hefboom doet draaien evenzoo. Bij de katrol zijn er twee koppels, en de resultante van de beide in het draaipunt werkende krachten geeft den druk aan van de pen in den beugel.

Het begrip „Statisch moment" zooals men het gewoonlijk opvat, heeft ten gevolge, dat men van het aanwezige koppel de tweede kracht weglaat, en dus vergeet.

Die tweede kracht is echter steeds aanwezig, waar een draaiende beweging is; bij het bepalen van zwaartepunten van vlakke figuren kan het niet-draaien daardoor verklaard worden. De draaiingsas is oorzaak van het optreden van de tweede kracht.

Is er geen vaste as, dan is ook de tweede kracht er niet, doch nu ontstaat de dubbele beweging (vooruitgang van het zwaartepunt en draaiïng daaromheen), die met behulp van de twee gelijke maar tegengesteld gerichte krachten in het zwaartepunt kan worden verklaard.

Men moet dus niet spreken over een kracht en een willekeurige as, maar over een lichaam, dat om een as kan draaien, en door een kracht gedraaid wordt; en moet daarbij beginnen met te onderzoeken, welke drukkingen op, en tegendrukkingen van de as optreden.

Het bewijs van de momentenstelling wordt wat meer samengesteld, omdat de tweede krachten der koppels ook nog moeten worden samengesteld; er wordt echter gewonnen aan beter inzicht van wat in werkelijkheid geschiedt.

F. J. Vaes.

34. *Het teekenen van een hoek van gegeven grootte.*

In het *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure,* No. 40, 1905, bl. 1656, geeft R. Henning een eenvoudig middel om een hoek van willekeurige grootte te teekenen met een voor de praktijk voldoende nauwkeurigheid.

Wanneer men namelijk een cirkel beschrijft zoodanig dat een boog van 90° juist 90 mM. lang is, dus met een straal $\frac{90}{\frac{\pi}{2}} = 57.3$ m.M., dan komt elke m.M. booglengte overeen met één graad. Om dus bijv. een hoek van 33° te teekenen past men 3 maal 1 c.M. en nog 3 m.M. af. De fout, die men maakt, door de koorde in plaats van den boog te nemen, kan verwaarloosd worden.

F. J. Vaes.

Boekbespreking.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publieé par les soins de B. Baillaud et H. Bourget.

Tome II (18 Oct. 1889—15 Déc. 1894) Gauthier-Villars, Paris, 1905, 457 bladz. 16 frs.).

De briefwisseling tusschen Hermite en Stieltjes (zie de bespreking in de vorige afl.) wordt hierin voortgezet.

Een portret van Hermite op 25-jarigen leeftijd is voor den titel geplaatst; achteraan zijn eenige brieven opgenomen van Stieltjes aan Mittag-Lefler, en een facsimilé van een brief van Stieltjes.

C. Guichard. Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux. (No. 25 der Collectie Scientia, Gauthier-Villars, Paris, 1905, 91 bladz. 2 frs.).

De Collectie „Scientia" bestaat uit een „Série physico-mathématique" en een „Série biologique".

In de eerste serie zijn op wiskundig gebied uitgekomen:

4. P. Appell. Les mouvements de roulements en dynamique.

7. H. Laurent. L'élimination.

12. J. Hadanard. La série de Taylor et son prolongement analytique.
15. P. Barbarin. La géométrie non-euclidienne.
18. E. Lemoine. Géométrographie.
20. H. Laurent. Sur les principes fondamentanx de la théorie des nombres et de la géométrie.

De overige nummers behandelen natuurkundige of scheikundige onderwerpen.

Het werkje van den heer Guichard sluit zich aan bij een studie over:

Les systèmes cycliques et les systèmes orthogonaux (Annales de l'Ecole normale 1897, 1898 en 1903).

De eerste hoofdstukken geven aan, wat de schr. bedoelt met systèmes points, systèmes plans en systèmes droites. Daarna worden drievoudig-rechthoekige stelsels besproken in ruimten van n afmetingen.

E. Jahnke. Vorlesungen über die Vektorenrechnung (Leipzig, B. G. Teubner, 235 blz., geb. M. 5.60.)

Dit buitengewoon duidelijk geschreven boek geeft een helder inzicht van de beteekenis der vektoren voor mechanica en wiskundige natuurkunde.

Een aantal uitgewerkte voorbeelden en opgaven ter oplossing vergemakkelijken de studie. Omtrent de vektoren zijn verschillende theorieën opgebouwd; dit boek behandelt de theorie, die de verste strekking heeft. Waar het noodig is, wordt den lezer gewezen op de afwijkingen der bestaande theorieën; op enkele plaatsen is een beknopt geschiedkundig overzicht gegeven.

De vektoren-rekening begint meer en meer aanhangers te vinden sedert ze gebleken is van nut te zijn voor de electronen-theorie.

Het boek is geschreven naar aanleiding van een cursus, die de schr. in de laatste jaren gegeven heeft aan de Technische Hoogeschool te Charlottenburg. Het is verdeeld in twee gedeelten:

vektoren in het platte vlak, en
" " de ruimte.

Het eerste gedeelte bevat achtereenvolgens:

optellen en aftrekken van punten met toepassing op de ligging van zwaartepunten;

vrije vektoren; gebonden vektoren; uitwendig en inwendig produkt; ontbinding van een vektor in drie richtingen;

vermenigvuldigen van drie punten; toelichting van de beteekenis hiervan voor de leer van het evenwicht en de leer van de beweging.

Merkwaardig is, dat vele uitkomsten voor elk dezer beide onderdeelen der mechanica geldig zijn, al naar gelang de beteekenis, die men aan de er in voorkomende grootheden hecht. Zoo stelt bijv. het uitwendige produkt van twee vrije vektoren het statische moment voor van een kracht ten opzichte van een punt, terwijl het inwendige produkt een verrichtte arbeid aangeeft.

Het is jammer, dat de schrijver niet vermeld heeft, om welke redenen men gekomen is te spreken van uitwendig en inwendig product, enz.

Na enkele toepassingen op meetkunde en goniometrie, volgt een afzonderlijk hoofdstuk met toepassingen op mechanica en natuurkunde: een vraagstuk betreffende stangenvierhoeken; afleiding van de formules voor de intensiteit van teruggekaatst en gebroken licht; terugkaatsing en breking van longitudinale golven; de wet van Ohm voor wisselstroom, de brug van Wheatstone voor wisselstroom.

De regressieve vermenigvuldiging leidt weder tot toepassing op de meetkunde en de bewegingsleer. Daarbij laat de schr. zien, dat de vektorrekening een band vormt tusschen de analytische en de synthetische meetkunde, doordien ze een constructieve opgave op den voet volgt, terwijl de resultaten telkens in analytischen vorm kunnen worden overgebracht.

Het tweede gedeelte: de vektoren in de ruimte geeft eveneens toepassingen op de meetkunde en de mechanica.

Afzonderlijke hoofdstukken bevatten toepassingen op de analytische meetkunde, op statica en kinematica, op de algemeene (schroefvormige) beweging van een lichaam, op oppervlakken en lijnen van dubbele kromming.

De beide laatste hoofdstukken behandelen het differentieeren van een vektor, met toepassing o. a. op kogelbanen, wet der perken, tol, impulsie der elektronen.

Nieuwe uitkomsten zijn niet verkregen; de voorrede zegt echter zeer terecht, dat het voordeel van de rekenwijze moet gezocht worden, dat ze uiteenloopende vraagstukken van uit één oogpunt doet bezien.

Het maakt een eenigszins vreemden indruk te hooren van optellen en vermenigvuldigen van punten. Feitelijk liggen hierin bewerkingen opgesloten, die, op de gewone

wijze opgevat, omslachtige beschrijvingen zouden noodig maken. Zoo wordt met de vergelijking

$$2\,B + 3\,C = 5\,D$$

bedoeld, dat een massa 2 in het punt B, en een massa 3 in het punt C een gemeenschappelijk zwaartepunt D bezitten, waarin de massa 5 gedacht kan worden te zijn opgehoopt, dat den afstand BC verdeelt in reden van 3 : 2.

De punten B en C zijn op deze wijze bij elkander *opgeteld.*

De schrijfwijze geeft dus in beknopten vorm eigenschappen, die hun verklaring vinden in samenstelling van krachten of massa's. (Zie een toepassing hiervan bij vraagstuk 42 en 43 van het W. T.)

Hieruit blijkt, dat het boek in geen geval voor H. B. S. of gymnasium geschikt is; het vereischt reeds een ruime kennis van wiskunde en mechanica. Vermeld moet worden, dat de vektorentheorie in nieuwere mechanica-boeken niet geheel dezelfde is, als de in het besproken boek gevolgde.

F. J. Vaes.

P. Appell et J. Chappuis. Leçons de Mécanique élémentaire à l'usage des élèves des Classes de première C et D, conformément aux programmes du 31 Mai 1902. 1re Partie, deuxième édition. (Gauthier-Villars, Paris, 1905, 186 bladz. 2.75 frs.)

Zooals den lezers van l'Enseignement Mathématique bekend is, werd eenige jaren geleden in Frankrijk een wijziging gebracht in het programma voor het onderwijs in wiskunde en werktuigkunde. Naar aanleiding daarvan werd bovengenoemd boek geschreven. De schrijvers hebben, overeenkomstig het nieuwe programma toepassingen gegeven op het gebied van praktijk en natuurkunde; zij hebben zich gesteld tusschen den natuurkundige en den wiskundige.

Beginnende met de bepalingen van segment op een vaste rechte of kromme lijn, van vektor, van projecties daarvan, komen de schr. tot het samenstellen van twee en meer vektoren, en de ontbinding van een vektor, met toepassing op het bepalen van een punt door zijn coördinaten; daarna tot draaiïng om een as, en het moment van een vektor ten opzichte van een punt. Dit laatste wordt voorgesteld door een anderen vektor loodrecht op het vlak, dat den 1en vektor en het punt bevat.

Dan: koppel van vectoren; moment van een vektor ten opzichte van een as; betrekkelijk moment van een van

twee vektoren ten opzichte van den anderen; viervlak en parallelopipedum geconstrueerd met twee vektoren als ribben, of als oppervlakdiagonalen. Het geheele eerste hoofdstuk is dus gewijd aan besprekingen over vektoren uit een zuiver wiskundig oogpunt, zonder dat aan het begrip moment of koppel eenige werktuigkundige beteekenis wordt gehecht. In het tweede hoofdstuk wordt het begrip *tijd* ingevoerd, en vrij uitvoerig over het meten daarvan gesproken; dan volgt de eenparige beweging van een punt, waarbij de snelheid als vektor wordt ingevoerd, en gedefineerd als de constante waarde van $\frac{\triangle x}{\triangle t}$, en de veranderlijke beweging, waarbij $\frac{\triangle x}{\triangle t}$ de gemiddelde snelheid is, die bij de limiet overgaat in $\frac{d x}{d t}$.

De beginselen der differentiaal rekening worden dus gebruikt; doch verder niet toegepast. Richting en grootte der snelheid bij kromlijnige beweging, hoeksnelheid ($\omega = \frac{d \theta}{dt}$), versnelling (als vektor voorgesteld, afgeleid uit de hodograaph), harmonische beweging op een rechte lijn, versnelling bij eenparige beweging langs een cirkelomtrek worden dan besproken.

Daarna komen: translatie, rotatie (voorstelling van de hoeksnelheid door een vektor), schroefbeweging van een lichaam, gevolgd door voorbeelden van toepassing: drijfstang en kruk, leiblok tusschen leibanen, assen in kussenblokken, schroef, alles uitnemend, wanneer men in staat is den leerlingen zulke onderdeelen in werkelijkheid te laten zien, doch zonder eenige waarde, wanneer men ze alleen op de prentjes laat afgaan.

Als laatste gedeelte van het 2e hoofdstuk volgt samenstellen van bewegingen, in het platte vlak en in de ruimte (n.l. als de meesleepingsbeweging een eenparige draaiïng om een as is).

De schrijvers geven voortdurend eenvoudige voorbeelden, die door elken leerling kunnen worden begrepen als toelichting.

Een 20-tal vraagstukken, enkele van een antwoord voorzien, besluiten het boek, dat blijkbaar geheel gewijd is aan de bewegingsleer.

Een tweede deel, dat nu besproken zal worden, gaat daarmede voort.

P. Appell et J. Chappuis. Leçons de Mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématiques A en B, IIe partie (Gauthier-Villairs, Paris, 1905, 296 bladz., 4 frs).

Dit deel is een voortzetting van het zooeven besprokene. Het eerste hoofdstuk bevat opnieuw bewegingsleer, nl. rollende (epicycloïdaal) beweging, wrijvingsraderen, tandraderen, riemoverbrenging, heugel; verder stangenvierhoeken (met afbeelding van een stoommachine, zooals ze in alle oudere boeken te vinden is), opnieuw drijfstang en kruk, pantograaph, ruit van Peaucellier, inverseur van Hart. Daarna 3 vraagstukken met oplossingen.

Het tweede hoofdstuk handelt over krachten, werkend op een materieel punt, en geeft de bepaling van materieel punt, kracht, en massa, het grondbeginsel der inertie, de maatstelsels; verder samenstelling van krachten, opgevat als vektoren.

Een volgende afdeeling behandelt evenwicht van een vrij punt, en wordt besloten door 6 vraagstukken.

Daarna komt evenwicht van een niet-vrij punt, dus bijv. een punt op een hellend vlak, met wrijving (wrijvingskegel), een punt op een willekeurig oppervlak, en op een kromme zonder wrijving met voorbeelden, en 5 vraagstukken.

Het derde hoofdstuk handelt over evenwicht van vrije lichamen: evenwicht van drie krachten, die door één punt gaan, van drie evenwijdige krachten, van drie willekeurige krachten; het moment van een kracht ten opzichte van drie coördinatenassen.

Een tweede afdeeling bespreekt de vervanging van een krachtenstelsel door een ander; koppels (hierbij wordt onmiddellijk gebruikt, wat in het eerste deel van het werk is vermeld), herleiding van een krachtenstelsel tot een kracht en een koppel, middelpunt van evenwijdige krachten, moment van een kracht ten opzichte van een vlak, zwaartepunten van vlakke figuren en eenvoudige lichamen. Dan 11 vraagstukken.

Het vierde hoofdstuk: evenwicht van niet-vrije lichamen, behandelt lichamen met een vaste as, of steunend op een glad vlak in één punt of langs een rechte lijn of in verschillende punten, met toepassing op eenvoudige werk-

tuigen: hefboom, windas, kaapstander, katrol, takels, tandraderen, heugel, hellend vlak. Daarna 4 vraagstukken.

Als vijfde hoofdstuk volgt de dynamica: 1e bewegingsvergelijkingen van een materieel punt, vallend lichaam, kogelbaan; 2e arbeid, met toepassing op het evenwicht van eenvoudige werktuigen; 3e levende kracht; toepassing op den enkelvoudigen slinger; arbeid, ingeval er wrijving is; 4e toepassing op werktuigen (blijkbaar staat dit eenigszins in verband met de artikelen van Koenigs in de Comptes-Rendues van een paar jaar geleden, welke gedeeltelijk berusten op de begrippen, welke Reuleaux neerlegde in zijn Kinematik), vliegwiel, vermogen van een machine, rem. Tot slot 6 vraagstukken.

Het werk is op een geheel anderen leest geschoeid dan wij gewoon zijn op de H. B. S.; het is moeilijk om te beslissen of de Fransche, dan wel onze methode beter is. Vermoedelijk zouden wij tijd tekort komen om te behandelen, wat de beide deelen bevatten. De behandeling van tandraderen en stangenvierhoeken enz., die een tint van praktijk geven, is uit den aard der zaak eenigszins oppervlakkig; zulke onderwerpen vinden bij den studeerende slechts dan belangstelling, wanneer ze breed worden opgevat en ontwikkeld. Eigenaardig is, dat veel Fransche boeken zich schuldig maken aan zeer oppervlakkige bespreking van stangenstelsels, een gebied, waarover men boekdeelen zou kunnen schrijven.

Het besproken werk is op Fransche wijze, duidelijk en elegant, en uiterlijk goed verzorgd.

De inhoud van de beide deelen volgt den inhoud van een hierna besproken werk op den voet. Geheele stukken zijn onveranderd of met weglating van enkele gedeelten overgenomen. De heer Appell heeft blijkbaar het grootste deel van de drie boeken geschreven, en de heer Chappuis heeft door weglaten en aanvullen het eerste en tweede pasklaar gemaakt voor het beoogde doel.

Paul Appell. Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe des mathématiques spéciales, conforme au programme du 27 Juillet 1904. Deuxième édition, entièrement refondue. (Gauthier-Villars, Paris, 1905, 477 bladz.)

Deze Cours de mécanique is geheel met differentiaalrekening behandeld. Eerst volgt weder als inleiding de bepaling van vektor en segment, in eens in de ruimte;

de inhoud van de inleiding is vrijwel gelijk aan die van de Leçons de mécanique élémentaire. (Zie hiervoor.)

Het 1e gedeelte, Cinématique, wordt verdeeld in bewegingsleer van het punt, en van stelsels; en de laatste in de bewegingsleer van onveranderlijke samenstellingen en van vervormbare stelsels. Onmiddellijk wordt het begrip snelheid ingevoerd, en spoedig daarna het begrip hoeksnelheid.

Bij de bepaling van de versnelling wordt gebruik gemaakt van de hodograaph.

De bewegingsvergelijkingen van een punt wordt opgesteld, en toegepast op verschillende gevallen, zoowel met rechthoekige als met pool- en cilinder-coördinaten. De centrale beweging komt daarbij ter sprake. Een afzonderlijke bespreking is gewijd aan graphische voorstellingen van snelheid, weg en versnelling.

De beweging van een onveranderlijk stelsel als translatie, rotatie en schroefbeweging wordt achtereenvolgens behandeld; door eenige figuren wordt aangegeven hoe men in de praktijk die bewegingen verwezenlijkt.

Een volgend hoofdstuk geeft de samenstelling van bewegingen. Het in de inlelding besprokene wordt hier toegepast.

Het tweede gedeelte, Mécanique, gaat uit van de beweging van een materiëel punt, bespreekt maatstelsels, dimensies, krachtvelden, en behandelt de bekende bewegingen van een vrij punt.

Evenals in het eerste hoofdstuk worden een enkele maal de hyperbolische sinus en cosinus toegepast. Bij de samenstelling van krachten doet de inleiding dienst.

Behalve de bewegingsvergelijkingen op rechthoekige assen, worden ook de ontbondenen van de kracht gegeven langs raaklijn, normaal en binormaal.

Een hoofdstuk is gewijd aan arbeid en arbeidsvermogen. Krachtvelden worden vrij uitvoerig behandeld. De bekende vraagstukken worden besproken.

Het hoofdstuk over niet-vrije bewegingen van een punt begint met het evenwicht van een materieel punt op een hellend vlak met wrijving; dan volgt de beweging langs het vlak met wrijving en zonder wrijving. De wet van actie en reactie komt ter sprake, en in een afzonderlijke paragraaph wordt over *druk* gehandeld. Daarop volgt de slinger, eerst met kleine, dan met willekeurige uitwijking.

Het derde gedeelte, Statique, begint met de momentenstelling, waarop koppels volgen.

Het evenwicht van een vrij punt, dat van een punt op een vast oppervlak met wrijving, op een vaste kromme zonder en met wrijving komen dan ter sprake.

Evenzoo de evenwichtsvergelijkingen voor een stelsel punten, waartusschen verbindingen bestaan.

Een volgend hoofdstuk geeft de evenwichtsvoorwaarden voor een vrij lichaam, waarbij de bepaling van zwaartepunten aansluit, en de evenwichtsvoorwaarden voor een lichaam met een vast punt, een vaste as.

Het laatste hoofdstuk spreekt over werktuigen.

De bekende prentjes van windas, treerad, kaapstander enz. treft men daar aan.

Een aantal vraagstukken zijn achter verschillende hoofdstukken opgegeven.

Een oordeel over de drie besproken boeken kan dit zijn. Duidelijk en helder geschreven, zijn ze zeker de lezing waard, vooral het laatst vermelde. Zij sluiten echter geen van drieën aan bij het onderwijs in ons land. De beide eerste geven te veel voor de H. B. S., en alle drie te weinig voor verdere studie. Voor hen, die een H. B. S.-cursus doorloopen hebben, zijn de beide eerste boeken uitnemend geschikt om hun inzicht in de mechanica te versterken en uit te breiden. Hebben zij zich eenigszins op de hoogte gesteld van hoogere wiskunde, dan is ook het derde boek aan te bevelen. F. J. Vaes.

Annuaire pour l'an 1906, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notes scientifiques. (Paris, Gauthier-Villars, 1.50 frs.)

Dit kleine boekje, in 16°, van bijna 900 bladz. bevat, als alle jaren een aantal opgaven, die zoowel voor de praktijk als voor de theorie van belang zijn. Elk jaar wordt een verhandeling over een wetenschappelijk onderwerp opgenomen; thans is dit een artikel van G. Bigourdan: „Les éclipses de Soleil", Instructions sommaires sur les observations, que l'on peut faire pendant ces éclipses.

Stereoscopic Vieuws of Solid Geometry Figures, with references to Well's Essentials of Solid Geometry. (Boston U. S. A., D. C. Heath & Co., 1899.)

Hoewel deze serie niet nieuw is, verdient ze toch wel een bespreking, daar ze in Europa blijkbaar niet, of weinig, bekend is.

Meer dan 90 stereoscoop-platen met witte lijnen op zwarten grond geven afbeeldingen van ruimtefiguren, zooals ze bij de theorie der Stereometrie noodig zijn. De ruimtefiguren komen zeer duidelijk uit, en de platen kunnen dus goede diensten bewijzen om het voorstellingsvermogen van leerlingen tegemoet te komen. Voor klassikaal onderwijs is het gebruik van de stereoscoop eenigszins bezwaarlijk; men moet zich beperken tot het laten zien van enkele platen aan het einde van een les, of gedurende schriftelijk werk. Voor privaatonderwijs zijn ze van veel waarde. De platen komen overeen met de afbeeldingen in een Amerikaansch stereometrie-boek: Webster Wells, The essentials of Geometry (Solid), bij de bovenvermelde uitgevers verkrijgbaar. Van dit boekje is de prijs f 2.25, van de serie platen f 1.50.

Elke stereoscoop kan gebruikt worden.

Vraagstukken.

(Oplossingen kunnen worden ingezonden aan den Hoofdredacteur vóór 25 Mei 1906.

Nieuwe opgaven, vergezeld van de oplossingen worden gaarne verwacht.

Verzoeke het papier slechts aan één kant te beschrijven, en voor elke oplossing een afzonderlijk vel papier te nemen).

91. Als D de boog is, die de polen der *om-* en *in*geschreven cirkels van een boldriehoek verbindt, dan heeft men:

$$\cos^2 D = \cos^2 (R - r) + \cos^2 R \sin^2 r.$$

(Uit: *William Chauvenet, A Treatise on plane und spherical Trigonometry.*) J. B. Bakker.

92. In een ellips trekt men uit de brandpunten twee voerstralen in dezelfde richting, en bepaalt het snijpunt van de raaklijnen in de uiteinden. Wat is de meetkundige plaats van dat snijpunt? (*Hadamard, Géométrie,* II.)

C. A. Cikot.

93. Dezelfde vraag voor de snijlijnen van de overeenstemmende raakvlakken twee aan twee bij een uitgerekte omwentelings-ellipsoïde. C. A Cikot.

94. Wat is het gemiddelde oppervlak in een ellips van een driehoek, die de twee voerstralen van eenzelfde punt tot opstaande zijden heeft? C. A. Cikot.

95. Bepaal de meetkundige plaats van de lijnen, die uit een brandpunt van een ellips getrokken worden onder eenzelfden hoek met de raaklijnen. (*Hadamard*, *Géométrie*, II).
C. A. Cikot.

96. De vier voerstralen in een ellips voor twee punten ter weerszijden van de groote as, sluiten altijd een vierhoek in wiens zijden aan eenzelfden cirkel raken; bewijs dit, en leid verder af welke betrekking er tusschen de ordinaten van die twee punten moet bestaan, opdat er *om* den bedoelden vierhoek een cirkel kan worden beschreven.
C. A. Cikot.

97. In een ellips trekt men door een willekeurig punt lijnen evenwijdig aan twee toegevoegde middellijnen; bewijs dat, als de vier stukken tusschen het punt en de ellips in richting en grootte krachten voorstellen, hun resultante door het middelpunt gaat; bepaal verder de grootte van die resultante. C. A. Cikot.

98. Dezelfde vraag als 97 voor een ellipsoïde. C. A. Cikot.

99. Door een punt trekt men twee lijnen, resp. evenwijdig aan de twee gelijke toegevoegde middellijnen van een ellips; bewijs, dat de snijpunten met de ellips de hoekpunten zijn van een koorden-vierhoek. Bewijs verder het analogon voor een ellipsoïde. C. A. Cikot.

100. Op de middellijn AOB van een cirkel neemt men een veranderlijk punt P. Op AP en PB als middellijnen worden cirkels beschreven. De meetkundige plaats van het middelpunt van een derden cirkel, die de eerste drie raakt, bestaat uit twee ellipsen, die het punt O tot gemeenschappelijk brandpunt hebben. H. v. Dinter.

101. Uit een punt trekt men 2 raaklijnen aan een gegeven cirkel A; men beschrijft een cirkel B, die aan de beide raaklijnen en aan A raakt; als nu het punt een vaste lijn doorloopt, omhult de poollijn van het middelpunt van B t. o. van A een vasten cirkel. H. v. Dinter.

102. Voor het geval dat $c > \sqrt{a^2 + b^2}$ wordt gevraagd de wortels van de vgl. $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ als een complex getal voor te stellen. C. v. SPAENDONCK.

103. Een parabool raakt een zijde van een driehoek in het midden, en het verlengde der twee andere zijden. De loodlijnen van uit de hoekpunten op een willekeurige raaklijn neergelaten vormen een harmonische evenredigheid. Bewijs dit. C. v. SPAENDONCK.

104. Door het middelpunt van een ellipsoïde wordt een vlak aangebracht, evenwijdig aan het raakvlak in een willekeurig punt. Indien dit punt zich op een kromtelijn beweegt, welk oppervlak zal dan het vlak door het middelpunt omhullen. C. v. SPAENDONCK.

105. De beschrijvende lijnen door $\xi \eta \zeta$, een punt op de hyperboloide $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, schijnen van uit een vast punt $f g h$, eveneens op de hyperboloide, loodrecht op elkaar te staan. Welke is de meetkundige plaats van $\xi \eta \zeta$? C. v. SPAENDONCK.

106. Op den omtrek eener ellips is een hoeveelheid massa verdeeld, zoodat elk boogje der ellips dat in het brandpunt een oneindig kleinen hoek $d\theta$ overspant evenveel massa bezit. In het brandpunt bevindt zich een materieel punt. Met welke kracht wordt dit punt langs de groote as aangetrokken. C. v. SPAENDONCK.

107. Een punt P beweegt zich langs een kromme met een snelheid, die omgekeerd evenredig is met den afstand van het punt P tot een vast punt O, terwijl de voerstraal OP een constante hoeksnelheid heeft.

I. Toon aan, dat de raaklijn aan de kromme in P met standvastige hoeksnelheid om dit punt wentelt.

II. Bepaal de grootte en de richting der versnelling van het punt P.

III. Bepaal de lengte van den voerstraal, die den boog tusschen O en den top A midden door deelt.

C. v. SPAENDONCK.

108. Op drie elkander loodrecht kruisende ribben van een kubus ABCDEFGH (van hout of carton), zijn punten P, Q en R genomen (op de ribben BC, EF en AH). Men vraagt op den kubus zelven de doorsnede af te teekenen met

het vlak, dat door P, Q en R bepaald is. (De ribben kunnen niet verlengd worden, en geen constructies mogen worden uitgevoerd op papier). F. J. VAES.

109. Gevraagd een driehoek te construeeren als gegeven zijn de som der loodlijnen op de opstaande zijden, de loodlijn op de basis, en de tophoek.

V. Th. v. d. VEN.

110. Welke vierkanten hebben op de plaats der honderdtallen een 0? H. G. A. VERKAART.

Vraag en Antwoord.

Antwoord op vraag 1. (Welke boeken zijn noodig voor de studie voor K^v.)

Volgens de wet op het Midd. Ond. omvat het examen:

1e. beschrijvende meetknnde, daaronder ook begrepen die der gebogen oppervlakken.

2e. de analytische meetkunde, daaronder ook begrepen die der gebogen oppervlakken.

3e. de differentiaal- en integraalrekening, vooral hare toepassingen op de meetkunde.

Zooals men ziet, drie deelen; op het examen echter, wegens de splitsing van 't 3e, vier deelen.

De boeken, door ondergeteekende daarvoor gebruikt zijn:

1e. *Traité de geometrie descriptive* par C. T. A. Leroy.

2e. *Leerboek der analytische meetkunde I en II* door Prof. van Geer.
Leçons de géometrie analytique par Briot et Bouquet.
Analytische Geometrie des Raumes von Salmon-Fiedler.

3e. *Cours de calcul differentiel et integral* par J. A. Serret.
Lehrbuch der Differential-gleichungen von Forsyth-Maser.
Recueil d'exercices sur le calcul infinitesimal par Frenet.
Leçons sur les applications geometriques de l'analyse par L. Raffy.

De laatste maanden neme men ter herhaling de *Wiskundige examenvragen van de ex. B der Pol. School* (Kluwer, Deventer).

Met zelfstudie is K^v wel te bereiken; beter is het les te nemen, veel beter is het nog de colleges te volgen aan een Hoogeschool.

Almelo. P. WIJDENES.

Van andere zijde wordt ons opgegeven:

L. Kiepert-M. Stegemann. *Grundriss der Differential- und Integralrechnung, 2 Theile.*

Sturm. *Cours d'analyse, 2e vol.*

N. C. Grotendorst. *Beginselen der Differentiaal en Integraalrekening* (bevat veel vraagstukken).

De voornaamste hoofdstukken uit:

A. R. Forsyth. *A Treatise on differential equations.* (De Duitsche uitgave bevat de oplossingen der vele vraagstukken.)

Dr. P. v. Geer. *Leerboek der Analytische Meetkunde, Deel II.*

Briot et Bouquet. *Leçons de géométrie analytique.*

Salmon-Fiedler. *Analytische Geometrie des Raumes.* (Hieruit slechts enkele hoofdstukken over oppervlakken van den 2en graad en differentiaal-meetkunde.)

N. C. Grotendorst en J. W. C. Beelenkamp. *Gronden der beschrijvende Meetkunde.* (Ook bestudeeren centrale projectie en axonometrie.)

C. F. A. Leroy. *Traité de géométrie descriptive.*

RED.

Vraag. 3. Bestaat er ook een instrument voor het trekken van bogen van cirkels met grooten straal, zonder punten op grooten afstand (b. v. het middelpunt) noodig te hebben? C. te D.

Antwoord. Men kan groote cirkelbogen trekken:

1e met de ruit (inverseur) van Peaucellier. Hierbij zijn de hoekpunten A en C van een ruit ABCD scharnierend verbonden met een punt O, door stangen van gelijke lengte. Als men het stangenstelsel om O laat draaien, en D een of andere kromme lijn laat doorloopen, dan beschrijft B een lijn, die ten opzichte van O inverse is van de eerste.

Want B en D liggen steeds op een uit A beschreven cirkel met straal AB, dus $OB \times OD$ is steeds $= OA^2 - AB^2$.

Laat men dus D een cirkel beschrijven met kleinen straal, dan beschrijft B een met grooten straal (als D dichter bij O ligt dan B).

Zelfs kan men B een rechte lijn doen doorloopen.

2e door twee latten aan elkander te bevestigen onder een stompen hoek, en ze te laten glijden langs 2 vaste pennen. Het hoekpunt doorloopt dan een cirkelboog.

F. J. VAES.

Vraag 4. Waarom wordt het getal e juist door dezen letter van ons alphabeth voorgesteld? C. te D.

Antwoord. De schrijfwijze e is van Euler afkomstig. Nadat hij — de man die vele handige, korte notaties invoerde — eerst voor 2,71 . . . c gezet had begon hij *zonder aangegeven reden* in 1731 hiervoor e te schrijven (in een brief van 25 Nov. 1731 heet het: „e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus = 1") Q.

Vraag 5. De breuk $\frac{1}{7}$ kan op de volgende wijze herleid worden tot een 10-deelige breuk:

Vermenigvuldig den noemer 7 met een getal, zoodat het product op een negen eindigt, dus met 7. Tel bij dit product 1 op en deel door 10, dan is het quotient 5. Vermenigvuldig nu op de volgende manier:

$$\overset{2\,1\,4\,2\,3}{0{,}142857_5}.$$

De noemer 7 is dus vermenigvuldigd met 5. Van het product 35 is het cijfer der eenheden links van de 7 geplaatst en het cijfer der 10-tallen er boven. Verder wordt 5×5 genomen en bij dit product de 3 opgeteld. Deze som is 28. De 8 wordt naast de 5 geschreven en de 2 er boven enz.

De verklaring van deze bewerking wordt gevraagd?

H. J. B.

Vraag 6. Is van het stelsel vergelijkingen

$$x^2 + y = a \ (1), \qquad y^2 + x = b \ (2)$$

een andere oplossing bekend dan de meest voor de hand liggende,

$$y = a - x^2, \qquad (a - x^2)^2 + x = b,$$

enz; en de volgende:

Stel $y = c + \sqrt{d}$, dan wordt (2):

$$c^2 + 2\,c\sqrt{d} + d + x = b, \text{ dus}$$

$$x = (b - c^2 - d) - 2\,c\sqrt{d}. \text{ Daardoor wordt (1):}$$

$$(b - c^2 - d)^2 - 4\,c(b - c^2 - d)\sqrt{d} + 4\,c^2\,d + c + \sqrt{d} = a.$$

Daar a rationeel is moeten de wortels wegvallen, alzoo

$$4\,c\,(b - c^2 - d) = 1 \ (3) \text{ zijn,}$$

terwijl overblijft

$$(b - c^2 - d)^2 + 4\,c^2\,d + c = a \ (4),$$

of in verband met (3):

$$\frac{1}{16\,c^2} + 4\,c^2\,d + c = a,$$

waaruit $d = \frac{a - c}{4\,c^2} - \frac{1}{64\,c^4}$ (5).

Dit gesubstitueerd in (3) geeft:

$$4\,bc - 4\,c^3 - \frac{a - c}{c} + \frac{1}{16\,c^3} = 1,$$

of $$64\,b\,c^4 - 64\,c^6 - 16\,a\,c^2 + 1 = 0.$$

Stel $c^2 = p$, dan wordt deze verg.:

$$64\,p^3 - 64\,b\,p^2 + 16\,a\,p - 1 = 0,$$

die op de bekende wijze kan worden behandeld.

R. V.

Vraag 7. Welke boeken zijn het meest aan te bevelen voor de studie voor acte middelbaar onderwijs K^{II}?

H. R.

Correspondentie.

L. S. Het blijkt niet genoegzaam bekend te zijn, dat het Wiskundig Tijdschrift geheel onafhankelijk is van het Wiskundig Genootschap „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam.

In het Jaarverslag van de Algemeene Vergadering van 30 April 1904 van dit Genootschap is vermeld, dat het Genootschap een tijdschrift zou oprichten (in den geest als nu het W. T. is).

Eenige dagen na die Algemeene Vergadering werd door de tegenwoordige redactie van het W. T. aan het Bestuur van het Wisk. Gen. voorgesteld het tijdschrift geheel onafhankelijk van het Wisk. Gen. uit te geven. In het Jaarverslag van de Algem. Vergad. van 22 April 1905 van het Wisk. Gen. is daaromtrent *niets* vermeld, zoodat de onjuiste meening moet hebben post gevat, dat het W. T. een uitgave is van het Wisk. Gen.

L. S. In een schrijven aan een der redacteuren werd de opmerking gemaakt, dat de behandeling van de eerste beginselen der determinantenleer wel wat laag bij den grond was. Omdat misschien ook anderen zulk een opmerking gemaakt hebben, diene de volgende toelichting:

Op verzoek van de redactie heeft de Schrijver van „Uit de theorie der algebraïsche vergelijkingen" zich wel de moeite willen getroosten, om zijn verhandeling aan te vangen met het begin der determinanten-leer, zoodat ook de lezers van het W. T., die niet in de gelegenheid waren studie van hoogere algebra te maken, van den inhoud kunnen kennis nemen.

Het is voor een schrijver steeds gemakkelijker te onderstellen, dat de lezer bekend is met alles, wat hij geen lust heeft neer te schrijven, dan om, zooals nu geschied is, een geheel te leveren, dat door elken lezer kan worden gevolgd.

Er moet bedacht worden, dat niet alle lezers een studie van hoogere wiskunde hebben kunnen maken, en dat het W. T. ook voor hen genietbaar moet zijn.

Het spreekt vanzelf, dat niet bij elke verhandeling kan worden begonnen met de elementaire beginselen, doch wanneer, zooals van het vermelde onderwerp, een uitgebreide verhandeling gegeven wordt, zal de redactie steeds op prijs stellen, dat de schrijver niet ergens midden in de theorie, doch bij den aanvang daarvan begint.

Dat is in het belang zoowel van de lezers als van den schrijver; immers de kans, dat het stuk gelezen wordt, neemt daardoor belangrijk toe. Red.

Aan de Redactie van het Wiskundig Tijdschrift[1]).

Nu de eerste jaargang van ons tijdschrift compleet is, zullen zeker alle lezers moeten erkennen, dat het levensvatbaarheid bezit niet alleen, maar meer nog, dat het voor vele beoefenaren der wiskunde in een behoefte voorziet; kortom, dat het een tijdschrift is, waaruit voor velen menige leering te trekken valt.

Met ingenomenheid begroet ik dan ook den tweeden jaargang, terwijl U veel succes op Uw redactioneelen arbeid wordt toegewenscht!

Er is maar één ding, dat ik gaarne anders zou wenschen, dat zijn de figuren. Ze zijn duidelijk en helder, ik erken het, maar zwarte figuren hebben m. i. dit groote gebrek, dat men er niets in schrijven kan. Is er een fout in, men kan die niet verbeteren; wil men er tot beter begrip van de zaak een teeken of een letter in zetten of een hulplijn in trekken, het is niet mogelijk; wil men een beschouwing

[1]) Op verzoek van den schrijver wordt deze brief opgenomen.

uitbreiden — niet doenlijk, tenzij men een geheel nieuwe figuur teekene.

Mochten deze bezwaren, die m. i. werkelijk niet zonder gewicht zijn, door U gedeeld worden, en de zwarte figuren door andere vervangen kunnen worden, dan zou dit naar mijn bescheiden meening een verbetering zijn.

Hoogachtend, Uw dw.

E. D. J. DE JONGH Jr.

KAMPEN, 19 October 1905.

De redactie stelt zeer op prijs, dat haar mededeeling wordt gedaan van de wenschen der lezers. Voor een gezonden toestand is het wenschelijk, dat ieder, die meent, dat op een of ander gebied verandering of verbetering noodig is, daarvan ook kennis geeft. Zoo mogelijk zal dan getracht worden het betere te bereiken.

Het reproduceeren der teekeningen kan op 3 wijzen geschieden: houtsnede, steendruk, zincographie.

De figuren in den 1^{en} jaargang en de meeste in deze afl. zijn houtgravures. Deze zijn voor kleine en eenvoudige figuren het gemakkelijkst te maken; de schrijver kan een potloodteekening geven, die de graveur overneemt. Vergeet de graveur een lijn of een letter, dan kan dat gemakkelijk verholpen worden.

Bij steendruk kan de schrijver ook een potloodteekening geven. De lithograaf neemt die over op geprepareerd papier met bijzonder soort inkt, en maakt daarvan een afdruk op lithografischen steen.

Vergeet de lithograaf een lijn of letter, dan kan dat ook nog wel verholpen worden. Een bezwaar is echter, dat de figuren eerst tusschen den tekst kunnen worden gedrukt nadat deze geheel gezet is, en dat men feitelijk elk vel tweemaal moet drukken. Zelfs als slechts een enkele kleine teekening op een vel voorkomt, dan moet toch met het brengen op den steen gewacht worden tot alles gezet is, en moet het vel tweemaal bedrukt worden.

Zincographie, welke tegenwoordig zeer veel wordt toegepast, vereischt teekeningen, liefst zoo groot mogelijk, in inkt gezet met flinke zwarte lijnen, en behoorlijke letters. Immers door photographie wordt de teekening op een zinkplaat overgebracht; door een bijtend vocht wordt het zink weggenomen naast de lijnen van de teekening, zoodat deze verheven komen boven de omgeving.

De redactie ontving in den laatsten tijd eenige teekeningen, die zij genoodzaakt was, zincographisch te doen reproduceeren met het oog op de samengesteldheid. Doch tevens is zij genoodzaakt die teekeningen eerst op de gewenschte wijze te doen overteekenen door iemand, die gewoon is met zulk werk.

De zinco- wordt evenals de houtgravure op een afzonderlijk blokje aangebracht, dat onmiddellijk tusschen den tekst kan worden geplaatst.

De teekenaar is een tusschenpersoon, die gewoonlijk de teekeningen niet begrijpt, zoodat ook hier vergissingen kunnen voorkomen. De door hem vervaardigde teekening moet dus door den schrijver worden nagezien; is er eenmaal een zinco van gemaakt, dan is toevoeging van lijnen vrijwel onmogelijk (iets wegnemen gaat in den regel wel).

Voor kleine figuren met weinig letters is houtgravure het gemakkelijkst, voor samengestelde figuren is zincographie gewenscht.

Daarom een verzoek aan inzenders van stukken, om de daarbij behoorende teekeningen

klein te maken, wanneer ze weinig lijnen en letters bevatten, en

op *groote* schaal te vervaardigen, wanneer ze samengesteld zijn. Red.

Het bewijs van den heer M. de Koning voor de regels van Neper, in de 4e afl., komt ook voor in het „Leerboek der boldriehoeksmeting" door J. J. van Laar. P. Noordhoff, Groningen 1892.

Alleen de formules:

$\cos c = \cot A \cot B$ en

$\cos c = \cos a \cos b$ worden er rechtstreeks afgeleid.

Genoemd leerboek schijnt weinig bekend te wezen; toch geloof ik, dat het heel goed is.

O. a. vond ik er ook in de afleiding van de cosinusformule voor de hoeken uit de cotangentenformule van den heer O. Bening.

U. G. D. R.

De behandeling van vraagstuk 21 kan worden gevonden in Lobatto, Lessen over de Hoogere Algebra, 1845, bl. 296.

L. M. de V.

Nieuw verschenen werken.

(*Door de Redactie ontvangen*).

S. DE GAST. Beknopt leerboek der wiskunde. I Rekenkunde, 2e stukje. 's-Gravenhage, Joh. Ykema, 1905. f 1.00.

CORNEILLE L. LANDRÉ. Stereometrische hoofdstukken ter uitbreiding van de elementaire leerboeken. Tweede verbeterde en vermeerderde druk. Utrecht, Gebr. van der Post. 1905.

F. J. VAES. Graphostatica. Eerste gedeelte. Samenstelling en ontbinding van krachten met toepassingen. Æ. E. Kluwer, Deventer, 1905. 133 bladz. f 1.50.

Uitgaven van A. Versluys, Amsterdam:

J. VERSLUYS. Inleiding tot het oplossen van meetkundige vraagstukken. 1906. f 0.90.

J. VERSLUYS. Meetkundige vraagstukken voor uitgebreid lager en middelbaar onderwijs. Eerste stukje. Zevende druk. 1906. f 0.40.

Uitgaven van P. Noordhoff, Groningen:

Dr. J. KORS. Leerboek der Algebra met opgaven. Tweede druk, nagezien door Dr. O. Postma.

L. v. ZANTEN Jzn. Leerboek der Algebra ten gebruike bij het onderwijs voor Ambachtslieden. Vierde druk, 1906. f 0,40.

Uitgaven van Gauthier-Villars, Paris:

B. BAILLAUD et H. BOURGET. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Tome II. 1905. 16 frs.

C. GUICHARD. Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux. (No. 25 van de Collectie Scientia). 1905. 2 frs.

PAUL APPELL. Cours de Mécanique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales. Deuxième Edition, entièrement refondue. 1905.

P. APPELL et J. CHAPPUIS. Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématiques C et D. Deuxième Edition. 1905. 190 bladz.

Uitgave van B. G. Teubner, Leipzig:

E. JAHNKE. Vorlesungen über die Vektorenrechnung. 1905. 5.60 M.

Over twee vraagstukken uit de Beschrijvende Meetkunde,

DOOR

DR. H. DE VRIES (Delft).

In het volgende wensch ik de aandacht van H.H. Docenten in de Beschrijvende Meetkunde aan inrichtingen van Middelbaar Onderwijs op twee vraagstukken te vestigen, die reeds bij de beginselen behandeld worden, doch ook later, bij voortgezette studie, steeds weer terugkeeren, en waarvan het dus van groot belang is dat de leerlingen van den beginne af aan de theoretisch beste, en tevens practisch kortste, nauwkeurigste, en dus doeltreffendste oplossing leeren kennen: ik bedoel de beide vraagstukken om, wanneer eene vlakke figuur bepaald is door haar vlak en ééne projectie, hieruit af te leiden 1^0 de ware gedaante, 2^0 de andere projectiën.

Jaarlijks aan het eind der maand September brengt mijn ambt mij in aanraking met jongelieden, die uit alle oorden des lands te Delft samenstroomen om hier o. a. theoretisch en practisch de Beschrijvende Meetkunde te bestudeeren, maar zelden of nooit geschiedt het dat zij van de beide zooeven genoemde vraagstukken de m. i. beste oplossing geleerd hebben; daarom neem ik de vrijheid hier deze oplossingen aan het oordeel der vakgenooten te onderwerpen in de hoop, dat dezen termen mogen vinden ze in hun onderwijs op te nemen.

Vraagstuk I. Eene vlakke figuur F is bepaald door haar vlak α, en één harer projectiën (bijv. de horizontale F'); gevraagd de ware gedaante van F.

Is het vlak α door zijn beide doorgangen d_1, d_2 gegeven (Fig. 1), dan slaat men in den regel één der twee volgende wegen in. Men brengt een standvlak aan $\perp d_1$, en bepaalt de snijlijn van dit vlak met α. Door middel van rechten $// d_1$ brengt men de verschillende punten van F op deze snijlijn over, slaat daarna de op die snijlijn liggende punten door middel van een stelsel concentrische cirkels in het horizontale projectievlak neer, trekt door de neergeslagen punten opnieuw lijnen $// d_1$, en laat eindelijk uit de punten

van F′ de loodlijnen op die lijnen neer. Wil men het standvlak vermijden, dan bezigt men den vertikalen doorgang d_2, brengt de punten van F door middel van dezelfde rechten $// d_1$ op *dezen* over, slaat hem daarna neer, en is dan verplicht een stel cirkels te teekenen om het gemeenschappelijk middelpunt O.

Is nu de neergeslagen figuur F_n (waarvoor in den beginne doorgaans een veelhoek gekozen wordt) langs één van deze beide wegen geconstrueerd, dan noodig ik den teekenaar uit eens na te gaan of iedere zijde (of diagonaal)

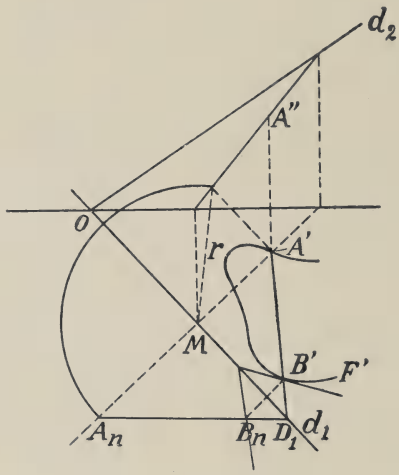


Fig. 1.

A′B′ van F′ de bijbehoorende rechte van E_n wel juist in een punt D_1 van d_1 ontmoet (Fig. 1), terwijl ik hem tevens verzoek mij de oorzaak voor het bestaan dezer contrôle te willen aangeven. Dit laatste gelukt in den regel wel, doch slechts na eenig overleg, en waarbij ten duidelijkste blijkt dat dit eenvoudige verband tusschen A′B′ en A_nB_n hem althans bij *dit* vraagstuk nooit is opgevallen; en wanneer nu de contrôle inderdaad wordt uitgevoerd, dan blijkt bijna zonder uitzondering dat de punten D_1 in losse bevalligheid om d_1 heen gegroepeerd liggen, terwijl slechts eene zeer kleine minderheid er inderdaad op ligt; van de met het vlak α neergeslagen rechten ligt zoo goed als

geen enkele inderdaad in dat vlak! Leert men hem nu eene constructie *waarbij juist van deze vaste doorgangspunten gebruik wordt gemaakt,* en die bovendien aanmerkelijk korter is dan de beide voorgaande, dan is hij volgaarne bereid de superioriteit dezer nieuwe oplossing te erkennen, maar.... indien zich over korter of langer tijd hetzelfde vraagstuk opnieuw voordoet, lost hij het op op de wijze zooals hij het op de H. B. S. heeft geleerd. Wat niet meer dan natuurlijk is. Daarom zou het wenschelijk zijn dat dit vraagstuk van meet af aan op de volgende wijze werd opgelost. (Fig. 1).

Construeer van één punt van F, bijv. A, de vertikale projectie, en daarna met behulp van den rechthoekigen driehoek AA'M, waarvan de eene rechthoekszijde A'M gelijk is aan den loodrechten afstand van A' tot d_1, de andere gelijk aan den loodrechten afstand van A'' tot de as van projectie, den straal van den cirkel dien A bij wenteling van α om d_1 beschrijft; door dezen straal van M af op de genoemde loodlijn uit te zetten vindt men A_n. Trek nu eene rechte A'B' door A', en die F' in één of meer punten snijdt; verbind het punt D_1 dezer lijn met A_n, en laat uit B' de loodlijn neer op d_1; het snijpunt dezer loodlijn met A_nD_1 is B_n.

Is F eene kromlijnige figuur, dan is het ten zeerste gewenscht van F_n niet alleen de punten doch ook de raaklijnen te construeeren; een matig aantal scherp bepaalde punten toch *met* de raaklijnen is voor het nauwkeurig teekenen eener kromme van veel meer waarde dan een groot aantal punten *zonder* raaklijnen, temeer daar in den regel verscheidene dezer punten zich niet eens goedschiks in het beloop der kromme willen voegen; welnu, men heeft slechts de raaklijn in B' aan F' met d_1 te snijden en het snijpunt met B_n te verbinden (Fig. 1), om onmiddellijk de raaklijn in B_n aan F_n te vinden.

Lost men het vraagstuk op deze wijze op, dan komt ook het theoretisch verband tusschen F' en F_n tot zijn recht, en heeft men gelegenheid iets mede te deelen over de zoo belangrijke Leer der Meetkundige Verwantschap. Men kan dan opmerken dat reeds in de Planimetrie enkele eenvoudige voorbeelden van meetkundige verwantschap op den voorgrond treden, nl. congruentie en gelijkvormigheid, dat er echter ook meer ingewikkelde vormen van meetkundige verwantschap bestaan, en dat men daarvan

een voorbeeld vindt in het verband tusschen F′ en F_n. Deze figuren zijn in het algemeen noch congruent noch gelijkvormig, doch zoogenaamd „*orthogonaal affien*", en deze verwantschap der „*affiniteit*" wordt gekenmerkt door de volgende beide eigenschappen:

1°. aan ieder punt der ééne figuur is één punt der andere toegevoegd, en de verbindingslijn van ieder paar toegevoegde punten is $\perp\ d_1$;

2°. aan iedere rechte der ééne figuur is ééne rechte der andere toegevoegd, en het snijpunt van ieder paar toegevoegde rechten ligt op d_1.

De lijn d_1 is dan de zoogenaamde „*affiniteitsas*, $A'A_n$ enz. zijn de „*affiniteitsstralen.*"

In het algemeen legt de nieuweling in onze teekenzaal vreeze en afschuw aan den dag voor vlakken wier doorgangen hem ontglippen; toch leert hem de harde noodzakelijkheid aldra, dat hij het zonder zulke vlakken op den duur niet zal kunnen stellen, en met constructies die op zulke vlakken betrekking hebben dient hij zich op den duur vertrouwd te maken. Wat nu ons vraagstuk aangaat, de constructie blijft in dit geval nagenoeg onveranderd.

Laat in Fig. 2 het vlak van F bepaald zijn door de beide rechten l_1, l_2, en laat ons aannemen dat de doorgangen onbruikbaar zijn. Men slaat dan het vlak α om eene rechte $h \,//\, d_1$ neer totdat het evenwijdig wordt aan het horizontale projectievlak, en projecteert daarna F_n op dit vlak, waardoor F'_n ontstaat. Men zal beginnen met het punt S'_n te bepalen (met behulp van een rechthoekigen driehoek waarvan de eene rechthoekszijde S′M′, de tweede de hoogte van S″ boven h'' is), om daarna door S′ rechten te trekken die F′ snijden (waartoe dikwerf ook l'_1 en l'_2 zelve zullen behooren), deze met h' te snijden, en de snijpunten met S'_n te verbinden. F′ en F'_n zijn dus opnieuw orthogonaal affiene figuren, doch de affiniteitsas is in dit geval h'. Eindelijk zal het onnoodig zijn op te merken dat alle voorafgaande beschouwingen evenzeer gelden voor de vertikale projectie van F en den vertikalen doorgang d_2 van α.

De orthogonale affiniteit is slechts een bijzonder geval van de meer algemeene affiniteit, waarbij de affiniteitsstralen wel is waar nog steeds onderling evenwijdig, doch niet

meer loodrecht op de affiniteitsas zijn; deze algemeene affiniteit nu is de verwantschap tusschen de beide *projecties* F′ en F″ van F. Dat aan ieder punt A′ van F′ één punt A″ van F″ is toegevoegd, en dat alle rechten A′A″ onderling evenwijdig (nl. loodrecht op de as van projectie) zijn, is duidelijk; en dat aan iedere rechte l' van F′ ééne rechte l'' van F″ is toegevoegd, eveneens; doch niet van algemeene bekendheid schijnt het te zijn, dat het snijpunt van ieder

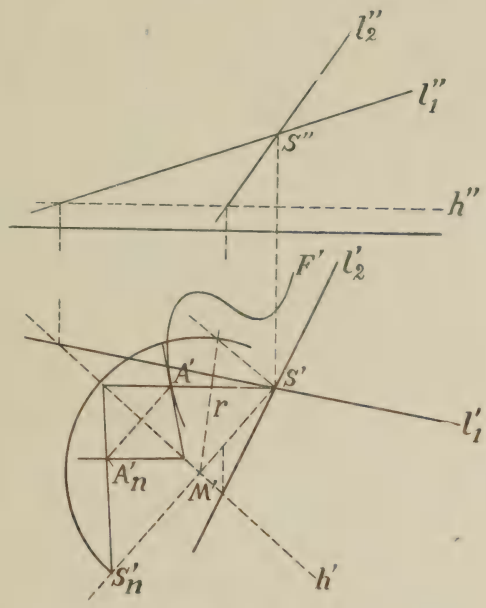


Fig. 2.

paar toegevoegde rechten steeds op eene vaste as gelegen is, die door het snijpunt O der beide doorgangen van α gaat, en wier ligging overigens slechts afhangt van den stand van α in de ruimte.

Men komt tot de kennis dezer as langs den volgenden, uiterst eenvoudigen weg.

De beide projectievlakken verdeelen de ruimte in vier tweevlakshoeken. Noemen wij de as van projectie gemakshalve de x-as, en het vlak door deze as dat den 1^{en} en 3^{en} tweevlakshoek middendoor deelt, het halveeringsvlak H_x,

dan is gemakkelijk in te zien dat dit vlak de meetkundige plaats van alle punten der ruimte is wier beide projecties, nadat de projectievlakken op de gebruikelijke wijze tot één vlak vereenigd zijn, elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de x-as; dit nu is, op zich zelf beschouwd, belangwekkend, doch voor de constructie van weinig beteekenis. Beschouwen wij daarentegen het vlak $H_{x'}$, dat den tweeden en vierden tweevlakshoek middendoor deelt, dan is dit de meetkundige plaats van alle punten der ruimte wier beide projecties *samenvallen;* en deze eigenschap nu is het die, behoorlijk geëxploiteerd, tot de ontdekking leidt dat F′ en F″ twee affiene figuren zijn.

Er volgt in de eerste plaats uit dat het allereenvoudigste vraagstuk der Beschrijvende Meetkunde dit is: eene rechte l met het vlak $H_{x'}$ te snijden; want de beide samenvallende projecties van dit snijpunt kunnen natuurlijk nergens anders liggen dan in het snijpunt van l' en l''; maar er volgt verder uit dat in ieder vlak α eene rechte $h_{x'}$ gelegen is (n.l. de snijlijn met $H_{x'}$), die de eigenschap heeft dat al hare punten samenvallende projecties hebben, zoodat zij zelve natuurlijk eveneens samenvallende projecties heeft; zij gaat klaarblijkelijk door het snijpunt O van de doorgangen van α, en is dus door nog één enkel ander punt bepaald. Nu ligt natuurlijk het snijpunt van iedere willekeurige rechte l van α met $H_{x'}$ op $h_{x'}$; geven wij dus aan de beide samenvallende projecties dezer rechte de notatie $h_{x'}''$, dan vinden wij: *de beide projecties van alle rechten l van α snijden elkaar op $h_{x'}''$*, waarmede in verband met het voorgaande bewezen is dat F′ en F″ twee affiene figuren zijn; de *affiniteitsas* $h_{x'}''$ staat echter in den regel niet meer loodrecht op de richting der affiniteitsstralen.

De vraag is nu hoe men van deze affiniteitsas van een vlak α bij de constructie gebruik maakt; dit wordt geïllustreerd door Fig. 3, waarbij wij onderstellen dat α door zijne doorgangen bepaald is. Bepaal van één punt A′ van F′ de vertikale projectie door middel van eene door A gaande en in α liggende hulplijn h; men vindt dan niet slechts het punt A″, doch in de verbindingslijn van O met het snijpunt van de beide projecties van h tevens de affiniteitsas; en alle overige punten B″ van F″ worden nu bepaald door B′ met A′ te verbinden, de verbindingslijn

met de affiniteitsas te snijden, het snijpunt met A″ te verbinden, en B′ loodrecht op te halen. De raaklijn in A″ snijdt die in A′ op de affiniteitsas; kan men dus die in A′ trekken, dan is ook de andere bekend. De raaklijn in B′ ligt in onze figuur te ongunstig om met de affiniteitsas gesneden te worden; men snijde haar daarom met die in A′, en hale het snijpunt op. Ook aan contrôles ontbreekt het geenszins; het snijpunt van A′B′ met de x-as, en dat van A″B″ met d_2 liggen op eene vertikale lijn; evenzoo

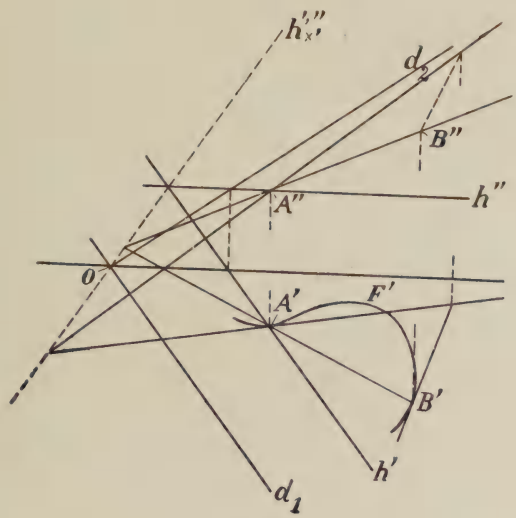


Fig. 3.

dat van de raaklijn in A′ met d_1 met dat van de raaklijn in A″ met de x-as; enz.

In Fig. 4 is aangenomen dat α bepaald is door twee elkaar snijdende rechten l_1, l_2; in plaats van ingewikkelder wordt nu de constructie eenvoudiger, want men heeft slechts de snijpunten van l_1', l_1'' en l_2', l_2'' met elkaar te verbinden, om onmiddellijk de affiniteitsas te vinden. Daarbij is in de figuur met opzet aangenomen dat één van die twee punten, nl. het tweede, ongunstig ligt; in plaats van l_2 bezigt men dan eene andere rechte h van α, en desgelijks indien l_1 niet te gebruiken is. Slechts indien de affiniteitsas zelve

buiten het blad valt, moet men zijn toevlucht tot andere middelen nemen.

Het groote belang van het vlak $H_{x'}$ voor de constructie is het eerst ingezien door W. Fiedler (vgl. zijne „Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage", 3e Aufl. Bd I, pp. 263 en 365).

Door het invoeren van een derde projectievlak ontstaat nog eene derde projectie, F‴, van onze figuur F, en men kan zich nu afvragen of ook F′ en F‴, en F″ en F‴ affiene

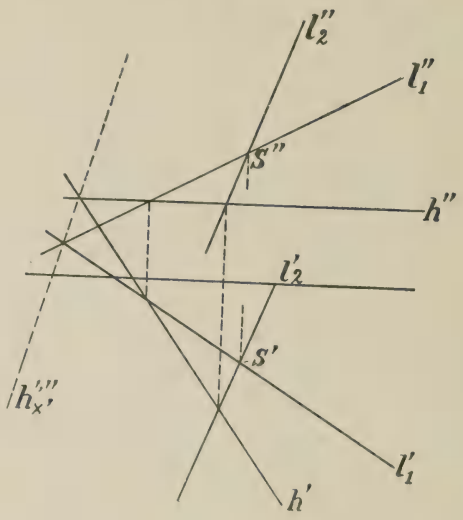


Fig. 4.

figuren zijn. Het is gemakkelijk in te zien dat het antwoord slechts voor de beide laatste bevestigend luidt, doch dat de verwantschap tusschen eerste en derde projectie ingewikkelder is. Het derde projectievlak snijdt de beide andere volgens twee nieuwe assen, de y- en de z-as, en door elk van deze gaan twee halveeringsvlakken, die wij zullen onderscheiden als H_y, $H_{y'}$, H_z, $H_{z'}$; daarbij nemen wij aan dat de vlakken H_x, H_y, H_z diegene zijn die door den 1en drievlakshoek gaan, terwijl de drie andere niet binnen dezen drievlakshoek komen. Het overzicht over de 6 vlakken H is zeer gemakkelijk te verkrijgen; denkt men nl. 8 kubussen van gelijke grootte in de 8 drievlakshoeken

geplaatst, en tegen de projectievlakken aangedrukt, dan vallen de 8 van het snijpunt O der drie projectieassen uitgaande lichaamsdiagonalen dezer kubussen samen in 4 rechten door O, en door elk dezer 4 rechten gaan 3 vlakken H; en wel als volgt. H_x, H_y, H_z gaan door eene rechte h, die in de drievlakshoeken 1 en 7 gelegen is, H_x, $H_{y'}$, $H_{z'}$, door eene rechte h_x in 2 en 8; $H_{x'}$, H_y, $H_{z'}$ snijden elkaar volgens eene rechte h_y die door de drievlakshoeken 4 en 6 gaat, terwijl eindelijk $H_{x'}$, $H_{y'}$, H_z eene rechte h_z gemeen hebben die in de drievlakshoeken 3 en 5 gelegen is. Behalve deze 4 snijlijnen der vlakken drie aan drie genomen zijn er nu nog drie snijlijnen twee aan twee, nl. de drie projectieassen.

Het is gemakkelijk in te zien dat het vlak $H_{z'}$ de meetkundige plaats van alle punten der ruimte is wier tweede en derde projectie samenvallen; een willekeurig vlak α snijdt het vlak $H_{z'}$ volgens eene rechte $h_{z'}$, voor welke dus de tweede en derde projectie eveneens samenvallen; en aangezien nu het derde projectievlak met het tweede vereenigd wordt juist op dezelfde wijze als het tweede met het eerste, nl. door ééne enkele draaiing, is het duidelijk dat de tweede en derde projectie eener vlakke figuur F in α affiene figuren zijn, en wel voor de affiniteitsas h_z'''''.

Het derde projectievlak echter wordt met het eerste vereenigd door *twee* draaiingen, nl. één om de z-as en één om de x-as; het laat zich dus verwachten dat hier de toestand eenigszins anders zal zijn. En inderdaad, vraagt men naar de meetkundige plaats van alle punten wier eerste en derde projectie samenvallen, dan vindt men niet een vlak, doch eene lijn, en wel de kubusdiagonaal h_y. Het blijkt nl. dat van een punt de eerste en derde projectie slechts kunnen samenvallen indien alle drie projecties samenvallen; immers is $P' \equiv P'''$, dan ligt P'' op de loodlijn uit P' op de x-as, doch tevens op die uit P''' op de z-as neergelaten; deze twee loodlijnen echter snijden elkaar natuurlijk in $P' \equiv P'''$. De meetkundige plaats van alle punten voor welke $P' \equiv P'''$, is dus identisch met die van alle punten voor welke $P' \equiv P'' \equiv P'''$, en dit blijkt de kubusdiagonaal h_y te zijn. Hiermede vervalt nu natuurlijk de affiniteit tusschen F' en F'''; het vlak α heeft met h_y slechts één punt gemeen, en overeenkomstige rechte lijnen

der beide figuren snijden elkaar dus niet op eene vaste as. Ook heeft het snijpunt van twee zulke rechten l' en l''' geen stereometrische beteekenis meer; d. w. z. indien men het, als punt van l' beschouwd, P′ noemt, dan ligt P‴ ergens anders, en hetzelfde is het geval met Q′ indien men het als een punt van l''' beschouwt en Q‴ noemt. Hieruit volgt tevens dat ieder punt in het vlak van teekening beschouwd kan worden als het snijpunt van de eerste en derde projectie van ééne rechte l van z, nl. van de verbindingslijn der zooeven genoemde punten P en Q.

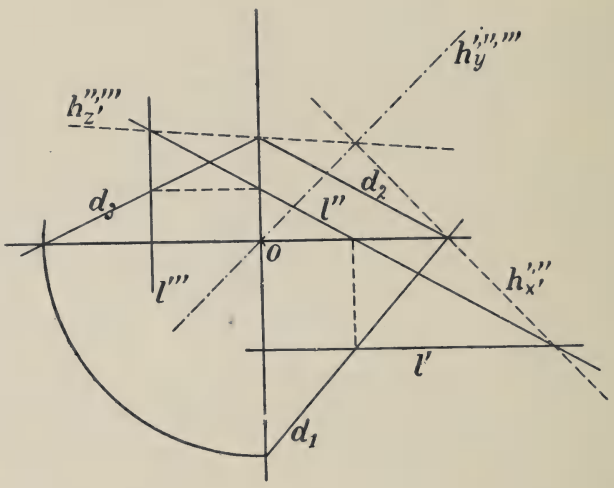


Fig. 5.

Uit het feit dat van een *punt* de eerste en derde projectie slechts kunnen samenvallen indien alle drie projecties samenvallen, volgt geenszins dat dit voor *rechte lijnen* eveneens het geval is; immers l' en l''' kunnen zeer wel samenvallen zonder dat tevens van alle *punten* van l de eerste en derde projectie samen behoeven te vallen. Wat het onderzoek der rechten l der ruimte betreft, voor welke $l' \equiv l'''$, doch niet $\equiv l''$, meent schrijver dezes te mogen verwijzen naar een stukje van zijn hand, dat verschenen is in het „Nieuw Archief voor Wiskunde", 2e reeks, Deel I, 2, 1895, p. 107.

Wil men in eenzelfde figuur bijv. uit F′ de tweede projectie F″, en daarna uit deze F‴ afleiden, dan moet men de beide affiniteitsassen $h_{x'}^{'''}$ en $h_{z'}^{'''}$ aanbrengen (Fig. 5); nu ligt hx' in Hx', hz' in Hz', en deze beide vlakken gaan volgens het voorgaande door de kubusdiagonaal hy; hx' en hz' snijden elkaar dus in het snijpunt van hy met α, d.w.z. in de teekening gaan de beide affiniteitsassen door eenzelfde punt van $h_y^{''''''}$, welke lijn de hoeken der assen op de in de figuur aangegeven wijze halveert.

Met uitzondering wellicht van wat hier is medegedeeld over het derde projectievlak en de daarmede optredende vier nieuwe deelvlakken, zijn de voorgaande beschouwingen m. i. geheel van elementairen aard, en voor leerlingen uit de hoogste klassen der H. B. S. alleszins bevattelijk; ik heb trouwens gedurende drie achtereenvolgende jaren gelegenheid gehad mij hiervan te overtuigen.

Naschrift van F. J. Vaes.

Bij het neerslaan van figuren komt de rechte lijn het eerst in aanmerking, en zeer zeker zal iedereen daarbij de snijpunten met de projectievlakken gebruiken. Met de zijden van een driehoek gaat dat ook nog, maar neem nu een zeshoek. Scherpe snijding, snijpunten van lijnen buiten de grenzen der teekening, een geharrewar van lijnen, dat voor de meeste leerlingen niet te overzien is. Ongetwijfeld is het zeer nuttig om op den samenhang te wijzen, en het gebruik van de doorsnede van het gegeven vlak met het deelvlak van het 2e en 4e kwadrant is zeer fraai, en zal ook op leerlingen, *die gevoel voor wiskunde* hebben, zeker wel indruk maken, maar voor de meesten is het door elkander loopen van lijnen een groot bezwaar.

Zoo spoedig mogelijk gaat Schr. dan ook over tot de constructie van den standhoek (die toch ook bij de affiniteitsconstructie gebruikt wordt), met de twee bundels lijnen evenwijdig aan den horizontalen doorgang, den bundel loodrecht daarop, en de concentrische cirkels. De teekeningen krijgen dan een rustiger aanzien, en de duidelijkheid wint in hooge mate. Scherpe snijding is geheel uitgesloten (tenzij de standhoek met het horizontale vlak weinig van 90° verschilt), en de evenwijdige lijnen en cirkels zijn veel spoediger op papier gezet, dan de verlengden der zijden van den veelhoek.

1er contrôle kan men nu de snijpunten aanstippen, waar de zijden of diagonalen van den veelhoek den hor.dg. snijden, voor zoover ze dat binnen de grenzen der teekening doen, en zien of de neergeslagen lijnen er door gaan. Daardoor is dan m. i. de maximum nauwkeurigheid bereikt.

Met affiniteit alleen werken kan zeer verkeerde figuren geven. Immers een kleine fout in het bepalen van het eerste punt kan de figuur onjuist maken, omdat men dan feitelijk de doorsnede van het prisma op de horiz. proj. met een ander vlak dan het bedoelde verkrijgt. Een kleine fout in de richting van de eerst neergeslagen lijn, kan andere punten geheel van hun plaats brengen; en met een beetje goeden wil kunnen dan toch de overeenkomstige stralen tot snijding op de affiniteitsas gebracht worden; door een onmerkbare draaïing van een verlengde, kan het snijpunt gemakkelijk eenige millimeters worden verplaatst. Bij evenwijdige lijnen kunnen zeer zeker ook fouten worden gemaakt, doch knoeierij van leerlingen is uitgesloten, als te spoedig in het oog vallend.

Bovendien hebben die evenwijdige lijnen zeer veel waarde voor projecteeren van een figuur of lichaam *op* een scheefstaand vlak.

De „benaderingsmeetkunde" zou hier een uitstekend terrein voor toepassing vinden.

Het bovenstannde is uitsluitend een persoonlijk gevoelen; mogelijk zullen anderen het geheel of gedeeltelijk onjuist vinden. Gaarne stelt het W. T. plaatsruimte beschikbaar voor een bespreking betreffende dit onderwerp. Hoe meer leeraren hun meening te kennen geven (op ervaring gegrond) des te aangenamer en vruchtbaarder kan zulk een bespreking worden.

Deelbaarheid van eenige algebraïsche vormen

DOOR

H. G. A. VERKAART (Haaksbergen.)

Bij het langs elementairen weg sommeeren der reeks

$$S = 1 \times 2\,x + 2 \times 3\,x^2 + 3 \times 4\,x^3 + \ldots + n\,(n+1)\,x^n$$

maakte ik gebruik van de hulpreeks

$$S_1 = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + \ldots\ldots n\,x^{n-1}.$$

Voor S_1 vond ik $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n-1}}{(1-x)^2}$, terwijl

$S = \frac{2x S_1 - n(n+1)x^{n+1}}{1-x}$ daardoor wordt

$$\frac{2x-(n+1)(n+2)x^{n+1}+2n(n+2)x^{n+2}-n(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Hieruit volgt:

$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ is deelbaar door $(x-1)^2$ . . . (1).

$n(n+1)x^{n+2}-2n(n+2)x^{n+1}+(n+1)(n+2)x^n-2$
is deelbaar door $(x-1)^3$ . . . . . (2).

Vermenigvuldigt men (1) met $(n+1)(x-1)$ en neemt men het verschil met (2), dan blijkt

$(n-1)x^{n+1}-(n+1)x^n+(n+1)x-(n-1)$
is deelbaar door $(x-1)^3$ . . . . . (3).

Substitueert men hierin n voor $(n-1)$, dan heeft men

$nx^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+(n+2)x-n$ is d.d. $(x-1)^3$ (4).

Vermenigvuldigt men (1) met x en neemt men het verschil der uitkomst met (4), dan vindt men

$x^{n+1}-(n+1x+n$ is d.d. $(x-1)^2$ . . . . . (5).

Vermenigvuldigdigt men (5) met $n(x-1)$ en neemt men het verschil met (4), dan heeft men

$2x^{n+1}-n(n+1)x^2+2(n^2-1)x-n(n-1)$
is deelbaar door $(x-1)^3$ . . . . . (6).

Wij zullen nu trachten (1) tot (6) ook rechtstreeks en zooveel mogelijk onafhankelijk van elkander aan te toonen.

1ste Methode.

(1). Voor $n=1$ is de vorm, dien wij A zullen noemen, gelijk aan $(x-1)^2$.

Voor 2 opeenvolgende waarden p en $p+1$ heeft men $A_{p+1}-A_p=(p+1)x^p(x-1^2$.

Hieruit blijkt het gestelde.

(2). Voor $n=1$ heeft men $B_1=2(x-1)^3$.

Verder $B_{p+1}-B_p=(p+1)(p+2)x^p(x-1)^3$.

(3) $C_1 = 0$

$C_2 = (x-1)^3$.

Voor $C_{p+1} - C_p$ vinden we

$$p x^{p+2} - (2p+1 x^{p+1} + (p+1) x^p + x - 1.$$

De vraag is of deze vorm (D) steeds door $(x-1)^3$ deelbaar is.

$D_1 = (x-1)^3$

$$D_{m+1} - D_m = (m+1) x^m (x-1)^3.$$

D is dus steeds deelbaar door $(x-1)^3$ en bijgevolg C ook. We kunnen D ook als volgt ontbinden

$D = (x-1)\{p x^{p+1} - (p+1) x^p + 1\}$. De tweede factor is blijkens (1), deelbaar door $(x-1)^2$.

(4). = (3).

(5). $E_1 = (x-1)^2$

$E_{p+1} - E_p = (x^p - 1)(x-1)$, dus d.d. $(x-1)^2$.

(6). $F_1 = 0$.

$F_2 = 2(x-1)^3$

$$F_{p+1} - F_p = 2 x^{p+2} - 2 x^{p+1} - 2(p+1)x^2$$

$$+ 2(2p+1)x - 2p = 2(x-1)\{x^{p+1} - (p+1)x + p\}.$$

De laatste factor is volgens (5), deelbaar door $(x-1)^2$, zoodat F steeds deelbaar is door $(x-1)^3$.

We kunnen ook uit F_{p+1} en F_p de termen met x^{p+2} en x^{p+1} elimineeren en vinden dan $F_{p+1} - x F p = p(p+1)(x-1)^3$, waaruit ook het gestelde volgt.

Tracht men een vorm te vinden, die door $(x-1)^4$ deelbaar is, en in bouw gelijkt op (1) en (2), dan komt men tot de vermoedelijke gedaante

$$G = n(n+1)(n+2) x^{n+3} - 3 n (n+1) n + 3) x^{n+2} +$$

$$3 n (n+2)(n+3) x^{n+1} - (n+1)(n+2)(n+3) x^n + 6.$$

$G_1 = 6(x-1)^4$.

$$G_{p+1} - G_p = (p+1)(p+2)(p+3) x^p (x-1)^4,$$

zoodat G dus werkelijk steeds deelbaar is door

$$(x-1)^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Uit (7) kunnen door vervorming en door combinatie met (1) tot (6) weer andere vormen afgeleid worden, hetgeen wij aan de liefhebbers overlaten, evenals het zoeken naar de algemeene gedaante der vormen, deelbaar door $(x-1)^y$, waarvan (1), (2) en (7) de gevallen voorstellen $y=1$, $y=2$ en $y=3$.

2de Methode.

A = (1). Stellen we voor x in de plaats $y+1$, dan kunnen we schrijven

$$A = (ny-1)\,(y+1)^n + 1$$

$(y+1)^n$ is van de gedaante $d\,y^2 + ny + 1$.

A wordt hierdoor $dy^2\,(ny-1) + n^2\,y^2$ en is d.d. door y^2.

B = (2). Bij dezelfde substitutie kunnen we voor B schrijven

$$(y+1)^n\,\{n\,(n+1)y^2 - 2ny + 2\} - 2$$

$$(y+1)^n = dy^3 + \frac{n\,(n-1)}{2}y^2 + ny + 1.$$

De vorm wordt van de gedaante

$$D\,y^3 + n\,(n-1)\,y^2 - 2n^2\,y^2 + 2ny + n\,(n+1)\,y^2 - 2ny + 2 - 2 = D\,y^3.$$

C = (3). Hiervoor kunnen wij schrijven

$$(y+1)^n\,\{(n-1)\,y - 2\} + (n+1)\,y + 2.$$

Stellen we nu voor $(y+1)^n$ dezelfde waarden als zooeven in de plaats dan wordt de vorm

$$Dy^3 - n\,(n-1)\,y^2 + n\,(n-1)\,y^2 - 2\,ny + (n-1)y - 2 + (n+1\,y + 2 = D\,y^3.$$

D. Bij dezelfde substitutie wordt de vorm $(y+1)^p\,(py^2 - y) + y$. We behoeven dus voor $(y+1)^p$ slechts in de plaats te stellen $d\,y^2 + p\,y + 1$, waardoor de vorm wordt

$$D\,y^3 - py^2 + p\,y^2 - y + y = D\,y^3.$$

E = (5). De vorm wordt

$$(y+1)^{n+1} - (n+1)\,y - 1.$$

$(y+1)^{n+1} = dy^2 + (n+1)\,y + 1$, waaruit onmiddellijk het gestelde volgt.

F = (6). Deze vorm kan herleid worden tot

$$2(y+1)^{n+1} - n(n+1)y^2 - 2(n+1)y - 2.$$

Stellen we hierin voor $(y+1)^{n+1}$ in de plaats $dy^3 + \frac{n(n+1)}{2}y^2 + (n+1)y + 1$, dan wordt de vorm gelijk aan $2dy^3$.

G = (7). Dezen vorm kan men herleiden tot

$$(y+1)^n\{n(n+1)(n+2)y^3 - 3n(n+1y^2 + 6n - 6\} + 6.$$

Voor $(y+1)^n$ kan men schrijven

$$(y+1)^n = dy^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}y^3 + \frac{n(n-1)}{2}y^2 + ny + 1.$$

Daardoor wordt G gelijk aan

$$Dy^4 - n(n-1)(n-2)y^3 + 3n^2(n-1)y^3 - 3n(n-1)y^2 - 3n^2(n+1)y^3 + 6n^2y^2 - 6ny + n(n+1)(n+2)y^3 - 3n(n+1)y^2 + 6ny - 6 + 6 = Dy^4.$$

Een moeilijkheid bij wortelvormen

DOOR

O. POSTMA (Groningen).

In de 3e aflevering, 1en jaargang, bl. 163, van dit tijdschrift kwam een artikel voor van den heer H. Schuitema over de moeilijkheden bij het verdrijven van het wortelteeken in goniometrische vergelijkingen[1]). Bij zijn beide voorbeelden:

$$(\operatorname{tg} x - 1)\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}} = 0, \text{ en}$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}} = 0,$$

werden in het eerste geval wortels ingevoerd, als men schreef $\sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}\sqrt{3}$, en in het tweede geval tengevolge van dezelfde herleiding, wortels weggelaten. Men

[1]) *Noot bij het ontvangen van de drukproef.* Dit stukje dagteekent van Juni '05.

krijgt in het tweede geval eerst alle wortels, als men schrijft $\sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}} = \pm \frac{1}{\cos x}\sqrt{3}$, waarbij het $+$teeken geldt als $\cos x +$ en het $-$teeken als $\cos x -$ is.

Nu heeft men echter, en de bedoeling van dit stukje is daarop eens even de aandacht te vestigen, in de gewone algebra precies dezelfde moeilijkheid.

Men mag daar evenmin $\sqrt{x^2} = x$ schrijven als hier $\sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}\sqrt{3}$, als men het teeken van x niet kent. Men zal bij vergelijkingen met één onbekende niet zoo dikwijls voor deze moeilijkheid komen, omdat men daar gewoonlijk al x of $-x$ vindt in plaats van $\sqrt{x^2}$, maar bij vergelijkingen met meer onbekenden, kan de bewerking er ons licht op voeren.

Men heeft b.v. de 2 vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{r} 5y + \sqrt{x^2 + 5y^2} = -8 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\}, \text{ waaruit } \begin{array}{r} 5y + \sqrt{9y^2} = -8, \\ 5y + 3y = -8, \\ 8y = -8, \\ y = -1, \\ x = -2. \end{array}$$

Deze waarden voldoen echter niet.

Dit komt omdat hier $\sqrt{9y^2}$ niet $3y$ maar $-3y$ is.

Dezelfde moeilijkheid als met $\sqrt{x^2}$ heeft men met $\sqrt{xy}$, wat niet $\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ is, als x en y beide neg. zijn, en met $\sqrt{\frac{x}{y}}$, wat niet $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ is, als y neg. is.

Men heeft n.l. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = -\sqrt{15}$, en $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = -\sqrt{-3}$.

Neem eens b.v. het volgende vraagstuk:

$$\begin{array}{l} x + \sqrt{xy} = -4 \\ y + \sqrt{xy} = 2, \end{array}$$

waaraan blijkbaar voldoen de waarden $x = -8$ en $y = -2$ en vergelijk de volgende oplossing:

$$\begin{array}{r} x + \sqrt{xy} = -4 \\ y + \sqrt{xy} = 2 \\ \hline x + y + 2\sqrt{xy} = -2 \end{array}$$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{-2}$ ($-\sqrt{-2}$ gaat niet, omdat $\sqrt{x}$ en $\sqrt{y}$ beide $+$).

Verder $x - y = -6$, dus

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{-6}{\sqrt{-2}} = 3\sqrt{-2}.$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{-2} \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3\sqrt{-2} \\ \hline 2\sqrt{x} = 4\sqrt{-2} \text{ en } 2\sqrt{y} = -2\sqrt{-2} \\ \sqrt{x} = 2\sqrt{-2} \quad \text{„} \quad \sqrt{y} = -\sqrt{-2} \end{array}$$

Men heeft dus geen oplossing, als men de gewoonte blijft volgen onder $\sqrt{y}$ een positief getal te verstaan.

De fout zit hierin, dat $x + y + 2\sqrt{xy}$ zoowel $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ als $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ kan zijn omdat $2\sqrt{xy}$ zoowel $-2\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ als $2\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ kan zijn. En hier is het $-2\sqrt{x} \times \sqrt{y}$.

In mijn schoolpraktijk had ik dit jaar eens de oplossingen na te kijken door de leerlingen gegeven van het vraagstuk: x en y te berekenen uit de 2 vergelijkingen:

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} - 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 2 \text{ en } x^2 - y^2 = 4.$$

Van de meesten was de oplossing als volgt:

Stel $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = u$ dan wordt de 1e verg.: $u - \frac{3}{u} = 2$ waaruit $u = 3$ of -1, waarvan -1 vervalt, omdat u een vierkantswortel is. Dus $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 3$ en $\frac{x+y}{x-y} = 9$, terwijl $x^2 - y^2 = 4$, waaruit dan verder:

$$x + y = \pm 6,\ x - y = \pm \tfrac{2}{3} \text{ en } x = \pm 3\tfrac{1}{3},\ y = \pm 2\tfrac{2}{3}.$$

Deze oplossing heb ik toen goed gerekend. De waarden voldoen ook. Maar bij nader inzien is dit toch toeval, want als $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = u$, is het niet zeker dat $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{1}{u}$

Het is niet zoo als de vorm onder het wortelteeken neg. is.

$\sqrt{\frac{2}{-3}} \times \sqrt{\frac{-3}{2}}$ is n.l. $= -1$ en niet $+1$, dus

$$\sqrt{\frac{2}{-3}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{-3}{2}}}.$$

Anderen hadden gesteld $\sqrt{(x+y)} = u$ en $\sqrt{(x-y)} = v$, waardoor de 1e vergelijking werd: $\frac{u}{v} - 3\frac{v}{u} = 2$ en de 2e

$u^2 v^2 = 4$. De eerste vergelijking gaf $u^2 - 3 v^2 = 4$ enz. Natuurlijk is dit alweer foutief. $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ is niet $\frac{\sqrt{(x+y)}}{\sqrt{(x-y)}}$, het kan ook (— deze vorm) zijn.

Bovendien is hier verder nog het gevaar uit $u^2 v^2 = 4$ alleen $u v = 2$ te bewaren en niet $u v = -2$, omdat u en v beide wortels zijn. Maar het product van 2 wortels kan negatief zijn: $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = -\sqrt{15}$, dus uv kan ook $= -2$ zijn.

Men ziet, dat het niet zoo gemakkelijk is een oplossing te vinden, waarbij substitutie overbodig wordt.

Het is trouwens niet bij de vergelijkingen alleen, waar men deze moeilijkheid heeft ook bij het herleiden van wortelvormen in het algemeen is het zoo, maar daar is men er gewoonlijk wat meer op verdacht.

Geen enkele der hoofdeigenschappen, voorgesteld door

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab},$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$
$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2},$$
$$\sqrt[3]{(\sqrt{a})} = \sqrt[6]{a},$$

gaat zeker door, wanneer a en b ook negatieve getallen kunnen zijn. Wat de laatste twee betreft, zoo is bijv. $\sqrt[3]{-1} = -1$ en $\sqrt[6]{(-1)^2} = +1$, terwijl $\sqrt[3]{(\sqrt{-1})} = -\sqrt{-1}$ en $\sqrt[6]{-1} = \sqrt{-1}$.

Men kan niet zeggen $\sqrt{a^2 - 2a + 1} = a - 1$, want het kan ook $1 - a$ zijn, zelfs niet $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = a + 1$, want als $a < -1$ is het $-(a + 1)$. Feitelijk kan men dus geen enkele bewerking met wortelgrootheden uitvoeren, als niet de waarde bekend is van de getallen door de letters voorgesteld, tenzij men bij iedere bewerking de mogelijkheid voor beide teekens openhoudt, wat wel wat lastig is, als men verscheidene bewerkingen moet uitvoeren.

Zou er niets op te bedenken zijn om aan deze moeilijkheid te ontkomen?

Men zou kunnen beproeven de bewerkingen met wortelvormen zoo te wijzigen, dat steeds aan de bovengenoemde hoofdeigenschappen voldaan wordt. Op het eerste gezicht schijnt dit niet zoo moeilijk. De eerste eigenschap gaat niet op, omdat bij definitie $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ en

verder $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{+1} = +1$. Maar zou men voor het laatste niet -1 kunnen nemen? Men ziet toch dat de $+1$ uit 2 factoren -1 ontstaan is, is het nu niet logisch ook weer -1 als wortel te nemen? Is het niet in overeenstemming met de methode $\sqrt{-1}$ als een reëele factor i te behandelen, ook de factoren -1 onder het wortelteeken, dus de factoren i^2 te bewaren en niet *onder het wortelteeken* de $i^4 = 1$ te stellen, d.w.z. geheel weg te laten?

Als men zoo doet is $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ en ook $\sqrt{(-1)^2} = -1$, dus ook algemeen $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Verder volgt hieruit $\sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{1}$, dus ook $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$, en algemeen $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Keeren wij nu eens terug naar het eerste bovengegeven voorbeeld:

$$\left.\begin{array}{r} 5y + \sqrt{x^2 + 5y^2} = -8 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\},$$

dan zou nu de daar gegeven oplossing geheel in orde zijn en de wortels zouden voldoen ook. Nu is n.l.:

$$5 \times -1 \times \sqrt{(-2)^2 - 5(-1)^2} = -5 + \sqrt{9(-1)^2} = \\ -5 - 3 = -8.$$

De moeilijkheid is geheel verdwenen.

Er staat ongelukkig tegenover, dat men nu met de factoren (-1) onder het wortelteeken anders moet doen dan men het in rationale vormen gewoon is, waar men $(-1) \times (-1) = +1$ stelt en dit kan tot zonderlinge dingen aanleiding geven, omdat men niet altijd van te voren weet of er uit een vorm naderhand nog ook eens de wortel zal getrokken moeten worden. Verder zou men allerlei soorten van imaginaire getallen krijgen, want $\sqrt[3]{-1}$ is nu niet -1 maar onherleidbaar, evenzoo $\sqrt[4]{-1}$ enz.

Een tweede manier is misschien iets meer de overdenking waard. Men zou kunnen afspreken, dat men niet zooals nu onder den wortel uit een algebraïschen vorm dien vorm zou verstaan, die in het kwadraat gebracht den eersten oplevert en positief wordt bij substitutie van de waarden, die men op het oog heeft, maar steeds beide wortels tegelijk. Dan zou dus in plaats van $\sqrt{x^2} = +x$

of $-x$, zooals nu, komen: $\sqrt{x^2} = +x$ en $-x$.*) De wortel zou dus meerwaardig zijn, evenals de cyclometrische functies

Als de wortel moet getrokken worden uit een rekenkundig getal, zou men zich aan het gewone gebruik kunnen houden. De bedoelde manier zou niet geheel zonder precedent zijn, want in één geval is men reeds vrij gewoon aan den wortel een dubbel teeken toe te kennen, n.l. bij wortels uit complexe vormen. Veelal verstaat men onder $\sqrt{4-6\sqrt{-5}}$ zoo- $-3+\sqrt{-5}$ als $+3-\sqrt{-5}$ en zelfs onder $\sqrt{4+6\sqrt{-5}}$ zoowel $-3-\sqrt{-5}$ als $+3+\sqrt{-5}$, al is dit laatste bij de tegenwoordige methode moeilijk te verdedigen.

Hoe eenvoudig zou alles worden, als deze weg gevolgd werd; geen substituties zouden meer noodig zijn! Maar zal men zeggen: dan zullen dus de 2 vergelijkingen $x+\sqrt{x}=6$ en $x-\sqrt{x}=6$ bijv. geheel op hetzelfde neerkomen. Het is zoo, als men alleen op x let; niet als men let op $\sqrt{x}$. Aan de eerste vergelijking wordt voldaan door $\sqrt{x}=2$ en -3, aan de tweede door $\sqrt{x}=3$ en -2. En verder zeg ik: dit bezwaar schijnt u niet te hinderen bij de vergelijkingen: $x+\sqrt{x}=-3$ en $x-\sqrt{x}=-3$, want nu neemt ge aan dat aan beide vergelijkingen wordt voldaan door dezelfde waarden voor x: $-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-11}$, omdat $\sqrt{x}$ complex is en ge dan geen verschil tusschen positief en negatief weet aan te wijzen.

Wil men dus van dit voorstel niet weten, dan moet men ook consequent zijn en voor het geval de wortels complex mochten uitvallen, alleen de positieve als de „goede" beschouwen. Het zal dan wel het beste zijn een complex getal positief te noemen als het reëele deel positief is en negatief als dit negatief is; als het nul is, is het teeken dat van het imaginaire deel[1]).

---

*) $\sqrt{x^2}$ zou dus voorstellen wat men wel den „algemeenen" wortel noemt.

[1]) Zie omtrent dit laatste: H. Weber, Encyclopädie der el. Algebra und Anal. Leipzig, 1903, p. 138, en O. Stolz und J. A. Gmeiner, Theor. Arithmetik. Leipzig, 1902, p. 290.

Het meetbaar maken van den noemer $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots \sqrt{a_p}$

DOOR

G. J. KROON (Dordrecht).

In het meetbaar maken van den noemer $\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots \sqrt[n]{a_p}$, geschreven door den heer F. T. A. Cedee (1e afl. 2e jaargang, blz. 17), wordt in de slot-alinea vermeld, dat voor $n = 2$ en p willekeurig zijn bewijs overgaat in dat, hetwelk door de H.H. Derksen en de Laive in hun leerboek der algebra (deel IV) is opgegeven.

Aangezien ik het niet eens ben met het door de H.H. Derksen en de Laive opgegeven bewijs, zij het mij vergund hier mede te deelen, hoe ik dit gedeelte in eene door mij samengestelde theorie der algebra opgenomen heb.

Deeling door een *veeltermige worteluitdrukking* kan slechts in enkele gevallen eenvoudiger voorgesteld worden.

a. enz.

b. enz.

c. enz.

d. Bij *vijf of meer vierkantswortels* blijft de herleiding mogelijk; maar de bewerking is zeer omslachtig, terwijl men na de herleiding zeer veel wortels in den teller zal hebben.

Daar deze herleiding voorheen onmogelijk genoemd werd, wordt hier het bewijs der mogelijkheid geleverd.

Heeft men 2 getallen a en b, dan kan men daaruit 2^{2-1} tweetermen samenstellen, door achter a beurtelings $+ b$ en $- b$ te voegen:

$$a + b, \qquad a - b.$$

Het product hiervan is: $a^2 - b^2$.

Heeft men 3 getallen a, b en c, dan kan men daaruit 2^{3-1} drietermen samenstellen, door achter $a + b$ en $a - b$ beurtelings $+ c$ en $- c$ te voegen.

$$a + b + c, \qquad a - b + c,$$
$$a + b - c, \qquad a - b - c.$$

Het product dezer 4 drietermen is:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2\,b^2 - 2\,a^2\,c^2 - 2\,b^2\,c^2.$$

Heeft men 4 getallen a, b, c en d, dan kan men daaruit 2^{4-1} viertermen samenstellen, door achter de hierboven

vermelde drietermen beurtelings $+d$ en $-d$ te voegen.

$$\begin{array}{ll} a+b+c+d, & a-b+c+d. \\ a+b+c-d, & a-b+c-d. \\ a+b-c+d, & a-b-c+d. \\ a+b-c-d, & a-b-c-d. \end{array}$$

Het product dezer 8 viertermen is:

$$(a^4+b^4+c^4+d^4-2\,a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-2\,a^2\,d^2-$$
$$2\,b^2\,c^2-2\,b^2\,d^2-2\,c^2\,d^2)^2-64\,a^2\,b^2\,c^2\,d^2.$$

Heeft men 5 getallen a, b, c, d en e, dan kan men daaruit 2^{5-1} vijftermen samenstellen, door achter de hierboven aangegeven viertermen beurtelings $+e$ en $-e$ te voegen.

$$\begin{array}{ll} a+b+c+d+e, & a-b-c-d+e. \\ a+b+c+d-e, & a-b-c-d-e. \\ a+b+c-d+e, & a-b-c+d+e. \\ a+b+c-d-e, & a-b-c+d-e. \\ a+b-c+d+e, & a-b+c-d+e. \\ a+b-c+d-e, & a-b+c-d-e. \\ a-b+c+d+e, & a+b-c-d+e. \\ a-b+c+d-e, & a+b-c-d-e. \end{array}$$

Het product dezer 16 vijftermen is:

$$\{(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+6\,a^2\,b^2+6\,a^2\,c^2-2\,a^2\,d^2-2\,a^2\,c^2$$
$$+6\,b^2\,c^2-2\,b^2\,d^2-2\,b^2\,e^2-2\,c^2\,d^2-2\,c^2\,e^2+2\,d^2\,e^2)^2+$$
$$16\,a^2\,b^2\,(a^2+b^2+2\,c^2-d^2-e^2)^2-$$
$$16\,a^2\,c^2\,(a^2+2\,b^2+c^2-d^2-e^2)^2-$$
$$16\,b^2\,c^2\,(2\,a^2+b^2+c^2-d^2-e^2)^2\}^2-$$
$$64\,a^2\,b^2\,\{(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+6\,a^2\,b^2+6\,a^2\,c^2-2\,a^2\,d^2-$$
$$2\,a^2\,c^2+6\,b^2\,c^2-2\,b^2\,d^2-2\,b^2\,e^2-2\,c^2\,d^2-2\,c^2\,e^2+2\,d^2\,e^2)$$
$$(a^2+b^2+2\,c^2-d^2-e^2)-4\,c^2\,(a^2+2\,b^2+c^2-d^2-e^2)$$
$$(2\,a^2+b^2+c^2-d^2-e^2)\}^2.$$

Stelt men bovenstaande vijftermen achtereenvolgens voor door $A+e$, $A-e$, $B+e$, $B-e$, enz., dan wordt hun product:

$$(A+e)\,(A-e)\,(B+e)\,B-e)\,\ldots\ldots=$$
$$=(A^2-e^2)\,(B^2-e^2)\,\ldots\ldots,$$

waarin niet anders dan even machten van e voorkomen.

Voor b, c en d kan men op dezelfde wijze handelen, terwijl men om het bewijs voor a te leveren kan schrijven:

$$(a+A)\,(a-A)\,(a+B)\,(a-B)\,\ldots\ldots$$

in welk product ook niet anders dan even machten van a kunnen voorkomen.

In het product der 16 vijftermen komen niet anders dan even machten voor. Vervangen wij dus a, b, c, d en e door $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ en $\sqrt{e}$, dan zal het product der 16 vijftermen geen enkel wortelteeken bevatten.

Hebben wij dus een noemer met 5 vierkantswortels, dan is het altijd mogelijk die breuk te herleiden tot eene zonder wortelteeken in den noemer; maar in den teller zullen dan zooveel wortelteekens voorkomen, dat er na eene omslachtige bewerking eene hoogst ingewikkelde vorm verkregen is.

Voor meer dan 5 vierkantswortels in den noemer is het bewijs op gelijksoortige wijze te leveren.

Over het minimum van afwijking bij een prisma

DOOR

C. KREDIET (Rotterdam).

Zijn i, i_1, r en r_1 de hoeken, α de brekende hoek van het prisma en δ de afwijking, dan is bekend:

$$\delta + \alpha = i + i_1,$$
$$\alpha = r + r_1.$$

Stel nu:

$$i = \frac{\delta + \alpha}{2} + \phi, \qquad i_1 = \frac{\delta + \alpha}{2} - \phi,$$

$$r = \frac{\alpha}{2} + \psi, \qquad r_1 = \frac{\alpha}{2} - \psi,$$

dan is, als n de brekingsaanwijzer is:

$$\sin\left(\frac{\delta + \alpha}{2} + \phi\right) = n \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \psi\right),$$

$$\sin\left(\frac{\delta + \alpha}{2} - \phi\right) = n \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \psi\right).$$

Door optelling en aftrekking krijgen wij:

$$\sin\frac{\delta + \alpha}{2} \cos\phi = n \sin\frac{\alpha}{2} \cos\psi;$$

$$\cos\frac{\delta + \alpha}{2} \sin\phi = n \cos\frac{\alpha}{2} \sin\psi.$$

Uit $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$ volgt nu:

$$\frac{\sin^2\frac{\delta+\alpha}{2}\cos^2\phi}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos^2\frac{\delta+\alpha}{2}\sin^2\phi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = n^2,$$

of

$$\sin^2\frac{\delta+\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\phi + \cos^2\frac{\delta+\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi =$$
$$n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

d. i.:

$$\left(\sin^2\frac{\delta+\alpha}{2} - n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$\sin^2\phi\left(\sin^2\frac{\delta+\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\delta+\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

dus:

$$\left(\sin^2\frac{\delta+\alpha}{2} - n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$\sin^2\phi\left(\sin^2\frac{\delta+\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

In het eerste lid is alleen $\sin\frac{\delta+\alpha}{2}$ veranderlijk en het blijkt onmiddellijk dat deze waarde minimum is als $\phi = 0$. Daarom is δ minimum als $i = i_1$. Tevens is dan:

$$\sin^2\frac{\delta+\alpha}{2} = n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

dus:

$$\sin\frac{\delta+\alpha}{2} = n\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Varia over π

DOOR

D^R. N. QUINT (den Haag).

Geen getal heeft zich in zooveel belangstelling mogen verheugen als π; het komt dan ook op zoo velerlei wijzen te voorschijn, dat, naar gezegd is, een geslacht van denkende wezens, die met π onbekend zouden zijn, onbestaanbaar is!

Shanks becijferde π tot in 707 decimalen *(Proc. Royal Soc. XXII, 1873, bl. 45)*, wat natuurlijk van niet het minste practisch belang is, maar slechts een bewijs is voor de voortreffelijkheid der tegenwoordige methodes boven de oude. Noodig zou het alleen kunnen wezen de eerste decimalen te kennen en daarvoor behoeft men dan slechts een uitspraak of een versje te onthouden, waarbij dan elk woord vervangen moet worden door een cijfer, het aantal letters aangevende, waaruit het bestaat. Deze methode kan daarom met succes worden toegepast omdat eerst de twee en dertigste decimaal van π een nul is; men heeft n.l.:

$\pi = 3,\ 141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279\ 502884 \ldots\ldots$

Niet onaardig is het misschien het volgende mee te deelen. Het eenvoudigst is wel om te zeggen:

drie en *een* is *vier* en *een* is *vijf*,

of

een vier en *een vijf* zijn te zamen *negen*,

wat al 4 of 5 decimalen geeft.

Zijn deze beide hulpmiddelen voor internationaal gebruik geschikt, het schijnt wel dat ook elk land nog zijne eigen ezelsbruggetjes heeft.

In Frankrijk groepeeren deze zich om het quatrain van Lucas:

„Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède! artiste! ingénieur!
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages."

Nu het rijmt en geeft 30 decimalen, maar de inhoud is weinig zaaks.

(Wordt vervolgd.)

Uit buitenlandsche tijdschriften.

---

1. Als de vier lijnen, die een volledige vierzij insluiten, in dezelfde verhouding door de hoekpunten verdeeld worden, zijn ze in de u. en m.r. verdeeld. (De eigenlijke vierhoek

heet in het volgende bewijs ABCD; het verlengde van AB snijdt dat van DC in E; het verlengde van BC snijdt dat van AD in F.)

Bewijs. Als men heeft $AB : BE = 1 : x$, dan moet men ook hebben $AD : DF = 1 : x$, $EC : CD = 1 : x$ en $FC : CB = 1 : x$, want bij iedere andere veronderstelling gaan een paar zijden evenwijdig loopen.

Volgens een bekende stelling heeft men:

$$AE.\ AF.\ BC.\ DC. = AB.\ AD.\ EC.\ FC,$$

en dus, op grond van de gegeven evenredigheden:

$$AB\,(1 + x).\ AD\,(1 + x).\ FC.\ x.\ EC.\ x. = AB.\ AD.\ EC.\ FC.,$$

waaruit:

$$(1 + x)\,x = 1, \text{ of } (1 + x) : 1 = 1 : x, \text{ of}$$
$$AB\,(1 + x) : AB = AB : AB\,x, \text{ of } AE : AB = AB : BE.$$

(Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 1905.)

C. A. Cikot.

2. In genoemd nummer wordt ook bewezen dat een koordenvierhoek waarin de zijden als de termen van een meetkundige reeks opklimmen, de volgende eigenschappen heeft:

1e. De diagonalen verhouden zich als 2 : 3.

2e. De kleinste diagonaal wordt door de grootste gehalveerd.

3e. Het product van de diagonalen is gelijk het product van de grootste zijde en de som van de verlengden der aangrenzende zijden.

4e. De kleinste zijde staat *nagenoeg* loodrecht op de overstaande zijde (de hoek tusschen die twee is in werkelijkheid 89° 35′ 30″.) C. A. Cikot.

3. *De formule van Heron.*

Aan Heron van Alexandrië (— 125) wordt vrij algemeen de eer gegeven het eerst de formule opgesteld te hebben, die den inhoud van een driehoek in de zijden uitdrukt en welke dan ook in Duitsche leerboeken „die Heronsche Dreiecksformel" genoemd wordt. Inderdaad komt dan ook in Heron's Peri Dioptras een bewijs voor, dat uitgaat van de waarde $I = r\,s$.

Wel is de vorm van Heron's formule zeer verschillend van hetgeen de klassieke Grieksche wiskundigen zich zouden veroorloofd hebben. De tweede en derde macht van een lijn, dat kon er bij door, wijl deze meetkundig konden voorgesteld worden, maar daar een figuur met vier afme-

tingen niet gedacht kon worden zoo zou door deze wiskundigen, die zoo groote zorg besteed hebben aan logische nauwkeurigheid hunner uitdrukkingen, een formule, waarin het reproduct van vier lijnen voorkwam zeker afgewezen zijn. Dit is dan ook de reden, dat sommigen, Chasles o. m., de formule toegeschreven hebben aan Heron van Constantinopel, die duizend jaar later leefde dan zijn meer beroemden naamgenoot. Later is echter gebleken dat de groote ingenieur der oudheid op verschillende plaatsen de formule gebruikt en men dus gerechtigd is tot nader orde aan den ouderen Heron de eer der afleiding te geven.

Heron's bewijs is als volgt: slechts zijn de redeneeringen wat beknopter weergegeven.

Zij (fig. 1) N het middelpunt van den ingeschreven cirkel dan trekt men men NK en CK loodrecht op BN en CB. O. a. uit den koordenvierhoek CNBK volgt:

$$\angle NKC = \angle NBC = \tfrac{1}{2}B \text{ en } \angle NKB = \tfrac{1}{2}C, \text{ dus}$$
$$\angle CBK = \qquad = \tfrac{1}{2}A.$$

De $\triangle\triangle$ BCK en FAN gelijkvormig zijnde is:

$$\begin{aligned}
BC : AF &= CK : NF \text{ of} \\
a : (s-a) &= CK : \quad r = CG : GD \text{ dus} \\
s : (s-a) &\qquad\quad = CD : GD \\
s^2 : s(s-a) &\qquad\quad = CD \times BD : BD \times GD \\
s^2 : s(s-a) &\qquad\quad = (s-c)(s-b) : r^2 \quad \text{of} \\
r^2 s^2 = \quad & s(s-a)(s-b)(s-c) \qquad \text{dus} \\
I = \sqrt{\ } & s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Ook de Arabieren waren met Heron's formule bekend, zooals blijkt uit het wiskundig boek der drie zonen van *Musa ibn Schâkir* (tweede helft der 9de eeuw), tot ons gekomen in een middeleeuwsche vertaling (*Liber trium fratrum de geometrica*). Zoo kwam de formule in Europa. Leonorda van Pisa nam ze op in zijne *practica geometriae*. Hij kreeg de formule voor r uit de beide betrekkingen, die meetkundig bewezen werden uit gelijkvormige driehoeken:

$$r : r_a = (s-a) : s \text{ en } r : (s-b) = (s-c) : r_a.$$

Dit bewijs vond, vooral nadat Luca Paciuolo (1445—1514) het in zijn *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* opgenomen had, verdere verbreiding; ook nu wordt het nog wel opgegeven. Regel is thans echter, dat Heron's formule bewezen wordt door gebruik te maken van de waarde der hoogtelijn in de

zijden uitgedrukt. Nu deze afleiding is ook van goeden huize en van niemand minder dan van Newton afkomstig. In zijne *Arithmetica universalis* wordt de formule voor de hoogtelijn afgeleid op de gewone wijze. Euler e.a. gaven

Fig. 1.

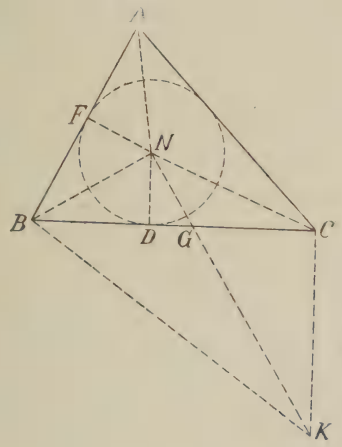
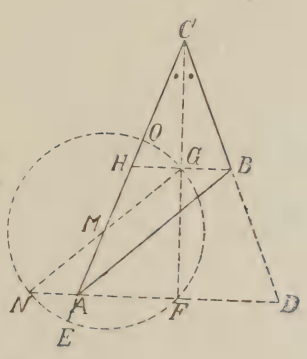


Fig. 2.



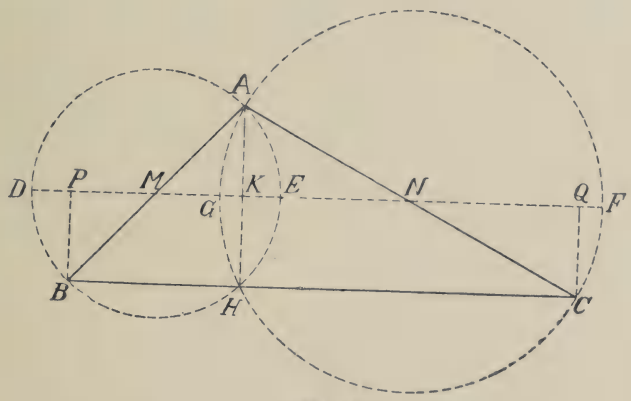


Fig. 3.

ook nog meetkundige bewijzen, die in verschillende boeken worden behandeld. Een bewijs echter van den Amerikaan Edward Olney, medegedeeld in zijne *Elements of Geometry*, is naar wij meenen nog niet in een Europeesch tijdschrift verschenen en moge daarom hier een plaats vinden.

H en D (fig. 2) zijn de spiegelpunten van B en A ten

opzichte van de deellijn van $\angle$ C. Een lijn door G // AB getrokken snijdt AD in N en AC in het midden M van AH. M is dan het middelpunt van een cirkel, die door N, G en F het snijpunt der deellijn en AD gaat.

In de figuur is nu:

$$\begin{aligned}
CE &= CA + AE = CA + ME - \tfrac{1}{2} AH = b + \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{2}(b - a) = s \\
AE &= \qquad\qquad\qquad\

$$19 \times 60 = \begin{array}{rr} 73 & 4 \\ 53 & 6 \\ \hline 3869 & 24 \\ 11 & 40 \\ \hline 3880 & 64 \end{array} \text{op} \qquad \text{of ook} \qquad 19 \times 40 = \begin{array}{rr} 54 & 6 \\ 72 & 4 \\ \hline 3881 & 24 \\ 7 & 60 \\ \hline 3880 & 64 \end{array} \text{af.}$$

Ook de waarde van $(100\,a + b)(100\,a + c)$ voor het geval $(b + c = 100$ geeft tot een eenvoudige berekening aanleiding, zooals blijkt uit:

$$8 \times 900 + 76 \times 24 = \begin{array}{rr} 8 & 76 \\ 8 & 24 \\ \hline 72 & 1824 \end{array}$$

Q. *Christie. Repr. Educ. Times. Vol. VIII. 1905. 15714.*

5. O *zij een punt binnen* $\triangle$ ABC. A′, B′, C′ *zijn de middens van* AO, BO, CO; *a, b, c de zwaartepunten der* $\triangle\triangle$ OBC, OCA, OAB. *De lijnen* A*a*, B*b*, C*c snijden elkander in een punt* P, A′*a*, B′*b*, C′*c in een punt* Q, *welke punten* P *en* Q, *op de lijn liggen, die* O *met het zwaartepunt* Z *van* $\triangle$ ABC *verbindt. Verder is* $\triangle\, abc = \frac{1}{9}\, \triangle$ ABC.

Zij D het midden van BC; dan ligt *a* op DO en is Z*a* $= \frac{1}{3}$ AO en // AO. Snijdt nu *a*A de lijn ZO in P, dan is ZP $= \frac{1}{4}$ ZO; op overeenkomstige wijze blijkt dat B*b* en C*c* ook door P gaan.

Zij nu Q het snijpunt van *a*A′ en ZO, dan is ZO $= \frac{3}{5}$ ZO, dus zullen de overeenkomstige lijnen ook door Q gaan. Daar $ab = \frac{1}{3}$ AB en // AB zal wezen is $\triangle\, abc = \frac{1}{9}\, \triangle$ ABC.

Uit dit bewijs blijkt dat het niet noodig is, dat O het middelpunt van den ingeschreven cirkel is, zooals de oorspronkelijke opgave luidt.

Q. *Tucker, Repr. Educ. Times. Vol. VIII. 1905. 15399.*

6. *Een Chineesche stelling over een koordenveelhoek.*

In de vorige aflevering werd op bl. 113 No. 18 een stelling van Tucker meegedeeld. Het blijkt nu, dat deze een bijzonder geval is van een fraai algemeen theorema, gevonden door een Chineesch wiskundige blijkens een opgave van Mikami te Tokio.

Zijn $A_1 A_2 \ldots A_n$ *een koorden-n-hoek en* S_r *de som der stralen van de cirkels beschreven in de driehoeken, die* A_r *tot top en de zijden van den veelhoek, behalve de twee die in* A_r *samenkomen, tot basis hebben. Dan is* $S_1 = S_2 = \ldots S_n$.

De genoemde stelling van Tucker toont aan dat zij juist is voor een koordenvierhoek. Met behulp hiervan kan men bewijzen, dat zij waar is voor een koorden-$(n+1)$-hoek, zoo zij waar is voor een koorden-n-hoek. Voor de veelhoeken $A_1 A_2 \ldots . A_n$ en $A_1 A_2 \ldots . A_n A_{n+1}$, zulien de sommen door S_r en $S^1{}_r$ worden voorgesteld; voor den straal van den ingeschreven cirkel van $A_x A_y A_z$ kiezen wij de notatie $(x.y.z)$.

Uit de figuur volgt nu:

$$S^1{}_1 = S_1 + (1.n.n+1)$$
$$S^1{}_r = S_r - (1.r.n) + (1.r.n+1) + (r.n.n+1),$$

en daar nu in $A_1 A_r A_n A_{n+1}$

$$(1.r.n) + (1.n.n+1) = (1.r.n+1) + (r.n.n+1),$$

zoo is $S^1{}_1 = S^1{}_r$ als $S_1 = S_r$.

Voor de genoemde stelling van Tucker geeft Neuberg een goniometrisch bewijs, dat hier nog moge volgen.

Zijn 2α, 2β, 2γ, 2δ de kleinste bogen door AB, BC, CD, DA onderspannen, dan is volgens een bekende betrekking

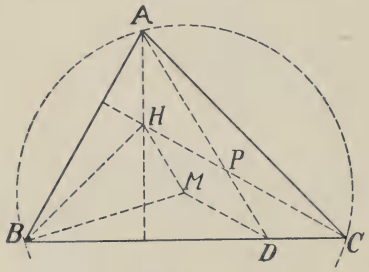


Fig. 4.

$$r_1 = 4\,R \sin\beta \sin\gamma \sin(\alpha+\delta),$$
$$r_3 = 4\,R \sin\alpha \sin\delta \sin(\beta+\gamma),$$

dus

$$r_1 + r_3 = 4\,R\,\Sigma \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cos\delta = r_2 + r_4.$$

Opgemerkt moge worden, dat dit bewijs ook voor uitbreiding vatbaar is. Voor een koorden-vijfhoek zou men b.v. vinden

$$S = 4\,R\,\Sigma \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cos\delta \cos\varepsilon - 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\delta \sin\varepsilon.$$

Grunert's Archiv. (3) IX. 1905.
Q. *Neuberg, Mathesis. 1905. Note 26.*

7. *Als in een driehoek een der hoeken 60° is, dan is het verschil der aanliggende zijden gelijk aan den afstand van het hoogtepunt H tot middelpunt M van den omgeschreven cirkel.*

Zij (fig. 4) $\angle B = 60°$; $BD = BA$, dan zal $DM \perp AB$ wezen, dus daar $\angle BAH = \angle MDB = 90° - A$ is, volgt uit

de congruentie der $\triangle\triangle$ AHB en DMB, AH = MD. Daar deze lijnen met AD hoeken van 30° maken is HM // AD. Daar $\angle$ HPA = 30° is, zoo zal dus AC — AB = CD = DP = HM.

Nouguiès. Bull. de Sc. Math. et Phys. 1905—06. No. 1664.

Q.

8. *Betrekkingen in den driehoek.*

1). $$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=$$
$$2\,ab+2\,ac+2\,bc-a^2-b^2-c^2=4\,r\,(4\,\mathrm{R}+r),\text{ daar}$$
$$a^2+b^2+c^2=2\,s^2-2\,r^2-8\,\mathrm{R}\,r$$
$$bc+ca+ab=s^2+r^2+4\,\mathrm{R}\,r.$$

G. F., als boven No. 1645.

2). Als d, d_1 de afstanden zijn van eenig punt P in het vlak van $\triangle$ ABC tot de middelpunten der in- en aangeschreven cirkels, dan heeft men:

$$\frac{d_1^2}{r_1}+\frac{d_2^2}{r_2}+\frac{d_3^2}{r_2}-\frac{d^2}{r}=8\,\mathrm{R}.$$

Trekt men deze vergelijking af van de formule van Bobilier: $r_1+r_2+r_3-r=4\,\mathrm{R}$, dan vindt men de betrekking:

$$\frac{\mathrm{M}_1}{r_1}+\frac{\mathrm{M}_2}{r_2}+\frac{\mathrm{M}_3}{r_3}-\frac{\mathrm{M}}{r}=4\,\mathrm{R},$$

waarin M.... de machten zijn van het punt P tot de vier genoemde cirkels.

Verkaart, Droz-Farny, Mathesis, 1905. Question 1515.

Q.

9. *Afleiding van de poollijn.*

Snijdt een lijn door P een cirkel, welks middelpunt M is in A en B; dan zal, als Q harmonisch toegevoegd is aan P, uit de betrekking PA : PB = QA : QB volgen QA $\times$ QB = QP $\times$ QN, zoo N het midden van AB is. Uit de laatste gelijkheid volgt nu, dat Q gelijke machten heeft voor den gegeven cirkel M en voor een cirkel, die MP tot middellijn heeft. De m. p. der punten Q is dus een rechte lijn, n.l. de machtlijn der beide genoemde cirkels.

Gérard. Bull. de Sc. Math. et Phys. 1906. bl. 101.

Q.

10. *Sur les theorèmes généraux de la mécanique et le calcul vectoriel*, par Georges Monnet, Lyon. L'Ens, Mathém. VIIe anneé No. 6, 15 Nov. 1905.

Het onderwijs in de mechanica begint tegenwoordig gewoonlijk (d.w.z. in Frankrijk) met een vectortheorie, waarvan de statica later als toepassing gegeven wordt. Het is wenschelijk op dergelijke wijze voor de dynamica te handelen, om daardoor de meetkundige beteekenis van sommige eigenschappen te doen uitkomen. De gewone bepaling van afgeleide van een vector onderstelt, dat deze een vasten oorsprong heeft; gemakkelijk kan men een uitbreiding er aan geven voor een veranderlijken oorsprong.

Zijn de vector I en het aangrijpingspunt A beide functies van parameter een λ, en gaan I en A voor een verandering $d\lambda$ over in I′ en A′, dan noeme men differentiaal van den vector het stelsel gevormd door A′, I′ en den in tegengestelden zin genomen vector I. Op rechthoekige coördinaten assen heeft men dan voor een vector I met ontbondenen X, Y, Z, aangrijpend in A met coördinaten x, y, z, als afgeleide het stelsel:

$$\begin{cases} X + dX, Y + dY, Z + dZ \text{ in het punt } x + dx, y + dy, z + dz, \\ \quad -X\ ,\ \ -Y\ ,\ \ -Z\ \ \text{„ „ „} \quad x, y, z. \end{cases}$$

Overgebracht naar A geeft dit:

als resultante dX, dY, dZ

„ moment $X\,dy - Y\,dx$, $Y\,dz - Z\,dy$, $Z\,dx - X\,dz$,

wanneer oneindig kleinen van de 2^e orde verwaarloosd worden.

De bepaling van de afgeleide volgt onmiddelijk uit deze formules; men ziet, dat ze behalve de als element van de hodograaph bepaalde afgeleide ook nog een koppel omvat, waaraan een meetkundige beteekenis is te hechten.

Van een stelsel vectoren vindt men de afgeleide door samenstelling van de afgeleiden van elk der vectoren. Zijn X_0, Y_0, Z_0, en L_0, M_0, N_0 de coördinaten van het stelsel op een gegeven oogenblik, dan is voor de afgeleide:

$$X_1 = \Sigma(X + dX) + \Sigma(-X) \text{ of } dX_0,$$
$$Y_1 = dY_0,\ Z_1 = dZ_0\ ;$$

en voor het koppel:

$$L_1 = dL_0,\ M_1 = dM_0,\ N_1 = dN_0.$$

Dus: de coördinaten van het afgeleide stelsel zijn de afgeleiden van de coördinaten van het oorspronkelijke stelsel.

Onderstelt men als bijzonder geval het koppel nul, dan wordt $X\,dy - Y\,dx = 0$, enz., dus moet A een vast punt zijn of

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

d.w.z. de vector moet gericht zijn volgens de raaklijn aan de door A beschreven kromme. Dit is het geval met de snelheid van een bewegend punt; de versnelling is de afgeleide in bovenbedoelden algemeenen zin.

Vormen dergelijke „tangentieële" vectoren een stelsel, en brengt men, in vaste punten, vectoren aan van gelijke grootte en richting, dan is de afgeleide van het tweede stelsel identiek met die van het eerste. Men vormt feitelijk de hodograaph van het eerste stelsel.

De algemeene theorema's der mechanica liggen besloten in het voorgaande. Bij een stelsel bewegende punten vormen de krachten, die op de punten werken een stelsel, dat het afgeleide is van het stelsel der hoeveelheden van beweging.

De vergelijkingen

$$X_1 = \frac{d\,X_0}{d\lambda},\quad Y_1 = \frac{d\,Y_0}{d\lambda},\quad Z_1 = \frac{d\,Z_0}{d\lambda}$$

geven de projecties van de hoeveelheden beweging en

$$L_1 = \frac{d\,L_0}{d\lambda},\quad M_1 = \frac{d\,M_0}{d\lambda},\quad N_1 = \frac{d\,N_0}{d\lambda}$$

die van de momenten daarvan.

Merkt men op dat X_0 de snelheid V_x voorstelt van het zwaartepunt, vermenigvuldigd met de totale waarde $\Sigma\, m$, dan drukt

$$X_1 = \frac{d\,X_0}{d\lambda} = \Sigma\, m\, X\, \frac{d\,V_x}{d\lambda}$$

uit, dat de resultante X_1 van alle krachten, de afgeleide is van de hoeveelheid beweging van het zwaartepunt, wanneer daarin de massa $\Sigma\, m$ wordt gedacht te zijn opgehoopt (eigenschap van de beweging van het zwaartepunt).

Wat betreft het theorema van levende kracht, toont een eenvoudige berekening aan, dat dit neerkomt op het aangeven van de voorwaarde (noodig en voldoende) dat de hoeveelheid beweging een tangentiëele vector is met modulus $m\,\frac{ds}{dt}$.

F. J. Vaes.

Boekbespreking.

Stereometrische hoofdstukken ter uitbreiding van de elementaire leerboeken, door Corneille L. Landré. Tweede verbeterde en vermeerderde druk. Met 79 houtsneefiguren in den tekst. Utrecht, Gebrs. van der Post, 1905.

„Neben Gauss", zegt Holzmüller in zijn uitvoerige Stereometrie (uitgegeven bij Göschen in Leipzig), „war Jacobi der letzte Mathematiker der zu den universellen gerechnet werden kann, der die Geometrie und die Analyse in gleicher Weise beherrschte." Al moet men nu hier, in dit verband, deze uitspraak niet letterlijk nemen (vooral het laatste woord niet), toch is het een feit dat in de laatste eeuw de wiskunde zich zóó in de breedte en de diepte uitgebreid heeft dat, wil men iets presteeren dat in zijn soort onberispelijk is, men zich tot een onderdeel moet beperken, als men niet toevallig Henri Poincaré of Felix Klein heet. (Het rapport over het acte-examen van Steiner zegt: „.... fast gänzlich fehlte ihm die Kenntnis der höheren Analysis.... Auf Differential- und Integralrechnung konnte er sich fast gar nicht einlassen, ja sogar die Kenntnis der Algebra scheint bei ihm nicht über die Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade zu gehen, wenigstens wie ihm derselbe gegenwärtig war. Ebenso hatte er selbst in der ebenen Trigonometrie keine Fertigkeit, und die sphärische fehlte ihm gänzlich.") Men kan dus bezwaarlijk van iemand, die van beroep actuaris is over Stereometrie een boek verwachten dat „up to date" en volledig is. Al geef ik direct toe dat absolute volledigheid niet te bereiken is, dat iedereen dien eisch anders zal opvatten, en dat geen een mij bekend werk over Stereometrie, zelfs het uitvoerige (hier en daar overuitvoerige) van Holzmüller niet, volledig is, aan den anderen kant is het toch te betreuren dat een niet-elementair werk over Stereometrie, uitgegeven in 1905, over de volgende interessante onderwerpen geheel zwijgt: orthocentrisch tetraëder, equifaciaal tetraëder, tetraëder waarvan de ribben aan eenzelfden bol raken, inversie, scheeve cirkelkegel, analogie tusschen Planimetrie en Stereometrie, elementaire Maxima en minima, meetkundige

plaatsen (om van diepergaande onderwerpen, als machtvlakken, bollenbundels, groepentheorie, enz. te zwijgen); om aan een of meer van die onderwerpen een plaats ingeruimd te zien, deed ik gaarne de helft van sommige onderdeelen (b.v. van de niet-convexe lichamen) cadeau.

Men versta mij wel; er staat zooveel wetenswaardigs in het boek, wat men zoo, en bloc, in weinig andere vindt, dat ik het iederen Wiskundige, vooral den leeraar en den aanstaanden leeraar, ter studie aanbeveel.

De volgende opmerkingen, die ik onder het lezen maakte, moeten dan ook meer als wenken opgevat worden voor een eventueelen derden druk.

Het eerste hoofdstuk handelt over het viervlak; voor de som van zijn hoeken vindt men als bovenste grens afgeleid, eerst 12 R, later 6 R; had de eerste niet weg kunnen blijven? Ook de manier waarop die tweede grens is gevonden, bevalt me minder; daarbij wordt, geheel onnoodig, een vreemd element (oppervlak van boldriehoeken) ingehaald; mij dunkt het bewijs dat ik in het Wiskundig Tijdschrift, I, bl. 207 meegedeeld heb (en dat *geen* uitvinding van mij is) beter.

De behandeling van het volgend onderwerp, de in- en aangeschreven bollen, gaf me geen opmerking in de pen, evenmin als „het vlak evenwijdig met twee kruisende ribben."

Op bl. 13 (eigenschappen leidende tot de scheeve oppervlakken) had men iets korter kunnen komen tot: LN // AC.

De onderwerpen: rechthoekig tetraëder; eene bijzondere pyramide; een stereometrisch analogon van het theorema van Pappus (overgenomen uit een artikel van Dr. Paraira) gaven mij geen aanleiding tot opmerkingen, zoo min als het tweede hoofdstuk, „De wet van Euler."

In het hoofdstuk „Convexe lichamen" zag ik met genoegen behandeld de maat van den veelvlakshoek; in deze richting is, dunkt me, nog wel wat te vinden.

In de paragraaf „Kenmerk van regelmatige lichamen" vind ik den naam van middenbol voor den bol die al de ribben raakt, minder gelukkig; als niet uitgemaakt is dat het lichaam regelmatig is, weet men ook niet dat die bol, als hij bestaat, de ribben werkelijk *in hun midden* raakt. Bij 2 en 3 had gezegd moeten worden dat de twee bedoelde bollen concentrisch zijn. Op deze bladzijde was het ook aangewezen over het zoo interessante equifaciaal

tetraëder te spreken; bij § 44 had men dan kunnen opmerken, dat bedoeld lichaam de hier genoemde eigenschap heeft.

Daar het bewijs op bl. 79-80 door een algemeener en eenvoudiger gevolgd wordt, had het eerste, m. i., weg kunnen blijven.

De onderwerpen „dubbelpyramide", „rhomboëder" en „rhombeidodecaëder" gaven geen aanleiding tot opmerking.

In §§ 66-70 wordt de stelling van Cavallieri behandeld, in het vierde hoofdstuk de „algemeene inhoudsformule"; het hoofdstuk begint met de bekende formule voor het prismatoïde, en eindigt met een algemeener formule, ontleend aan een verhandeling van Prof. Jan de Vries (§§ 70-103). Op bl. 112 vonden we van een ontwikkelbaar oppervlak de definitie, die door den heer van Aller op bl. 240 en vlg. van den vorigen jaargang van dit tijdschrift werd afgekeurd (met opgaaf van redenen); op bl. 113 frappeerde mij de volgende incorrecte redeneering: „Wetende dat de formule geldende is (waarom niet gezegd „geldt"? ref.) voor de schijf en ook voor den afgeknotten kegel, besluiten wij, dat zij geldt voor den bolvormigen ring, die het verschil is van den schijf en den afgeknotten kegel". Mag men dus ook zóó redeneeren: De *s*-formule voor het oppervlak van een driehoek geldt ook voor den vierhoek die het verschil is van twee driehoeken"?

Het vijfde hoofdstuk „Doorboorde lichamen", het zesde „Stervormige veelhoeken" en het zevende „Stervormige lichamen" gaven geen aanleiding tot opmerkingen; eerlijkheidshalve moet ik hier bijvoegen dat ik de 80 bladzijden welke aan die lichamen gewijd zijn, uit gebrek aan belangstelling, niet grondig bestudeerd heb.

Het boek sluit met een hoofdstuk over „Meetkunde van het zwaartepunt". Gaarne had ik gezien dat in dit hoofdstuk gewezen was op de kolossale belangrijkheid van dit punt, ook uit zuiver meetkundig oogpunt (denk aan den driehoek), en dan mis ik er noode in de belangrijke eigenschap, dat als een vlakke figuur een diameter, of een lichaam een diametraal vlak bezit, bedoelde lijn of bedoeld vlak het zwaartepunt bevatten; voor vlakke figuren had men dit bij den driehoek als voorbeeld kunnen bewijzen. Goed is het dat de afleiding van laatstbedoeld zwaartepunt, zooals die in de eerste uitgave voorkwam, geschrapt is (wonder genoeg komt het foutieve van die afleiding, n.l. de

bewering dat het zwaartepunt van een trapezium, bij het onbepaald afnemen van de hoogte, identisch wordt met het zwaartepunt van een lijn, nog voor in een vrij algemeen gebruikt leerboek van Mechanica.)

Is de stelling op bl. 256 belangrijk genoeg om er twee bladzijden meê te vullen?

Op bl. 259 zie ik tot mijn spijt een onnauwkeurigheid, anoloog met die welke bij den driehoek verbeterd is, behouden; daar lees ik n.l. „bij het naderen van het aantal vlakken tot ∞, naderen de afgeknotte pyramiden tot de de doorsneden". Kan men dan, omgekeerd, door een oneindig groot aantal vlakken op elkaar te stapelen, een lichaam doen ontstaan?

Het boek eindigt, heel modern, met de invoering van vectoren in de theorie van het zwaartepunt.

Ik vergat nog aan te stippen dat, behalve Prof. J. de Vries en Dr. Paraira, mijn collega J. N. Visschers bijgedragen heeft tot de verbeteringen in den tweeden druk.

De uitgevers, Gebr. van der Post, Utrecht hebben voor een kloeken druk gezorgd; de figuren zijn tusschen den tekst opgenomen, sommige daarvan hadden beter kunnen zijn.

Ten slotte beveel ik het boek, in weerwil van enkele onvolmaaktheden; in de belangstelling van de lezers van ons tijdschrift aan; juist als dit, brengt het hen op het, tot nog toe door Nederlanders vrijwel verlaten, terrein der tusschenwiskunde.

C. A. Cikot.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von H. Weber und J. Wellstein (Leipzig, Teubner).

I. Elementare Algebra und Analysis, von H. Weber. 1903 (8 M.).

II. Elemente der Geometrie. 1905 (12 M.)[1].

De Straatsburger hoogleeraren Weber en Wellstein hebben, op uitnoodiging van den uitgever Teubner, en in vervanging van de uitverkochte „Elemente der Mathematik" van Baltzer, bovenstaande Encyclopedie geschreven. Zij gingen daartoe des te eerder over omdat zij ieder jaar college geven over de beginselen der wiskunde (Weber al sedert 1888).

[1]) In dit deel behandelt Wellstein de grondslagen der Meetkunde, Weber de Trigonometrie, de Analytische Meetkunde en de Stereometrie, Jacobsthal de Meetkunde van den bol.

Het feit dat dit werk denzelfden uitgever heeft als de groote Encyclopedie der Wiskunde en het „Repertorium der höheren Mathematik" wijst er al op dat het niet in de bedoeling ligt met genoemde werken te concureeren; behandeling van ondergeschikte punten (b.v. van de meer dan duizend zoogenaamde merkwaardige punten van den driehoek) is uitgesloten, bronnen worden spaarzaam aangegeven, maar de grondslagen worden breedvoerig besproken.

„En fait" zegt Picard in „Quelques réflexions sur la Mécanique", „là où les Lagrange et les Laplace trouvaient toutes choses simples, nous rencontrons aujourd' hui les plus sérieuses difficultés." Het tegenwoordig tijdperk, dat alles op losse schroeven zet, heeft dit ook met de Wiskunde (Mechanica incluis) gedaan; niet alleen dat, zooals vroeger, mannen die geheel of half buiten het vak staan (artisten en philosophen) de waarde er van betwisten, maar wiskundigen van naam verklaren zich ontevreden met hetgeen tot nog toe gold als het fondament van de wiskunde. En nu moge Wellstein in de voorrede van deel II (en tot de bespreking van dit deel bepalen we ons in dit nummer) zeggen „Nichts ist so geeignet, den Lehrer innerlich zu heben und mit dem Gefühl der Grösze seines Berufes zu erfüllen, als die klare Einsicht, dasz die Grundlegung der Geometrie ein beinahe unüberwindlich schwere Aufgabe ist, mit deren Lösung er sein ganzes Leben hindurchringen musz", al laat hij daarop volgen „Es sei auch an dieser Stelle der Gedanke abgewiesen, als solle der geometrische *Unterricht* rein formal logisch betrieben werden", voor ons leeraren, die toch al getob genoeg hebben om onzen leerlingen de meetkunde in te prenten, wordt het een leelijke complicatie dat we voortaan dingen als waarheid voordragen, waaraan we zelven twijfelen. Een troost is het dat het in ieder geval zijn nut heeft de kinderen te leeren hoe, als voor waar *aangenomen* wordt A, B, C, D en E, daaruit het verdere alphabet gehaald kan worden, en verder dat de goede, ouderwetsche meetkunde in de praktijk nog altijd opgaat en haar volle waarde houdt.

Iedereen die met de geschiedenis der meetkunde bekend is, weet dat de theorie van de evenwijdige lijnen al lang, in het oog der wiskunstenaars, de zwakke plek van de meetkunde was; reeds vroeg, maar te vergeefs, zocht men op alle manieren het „axioma van Euclides" te bewijzen,

totdat, omstreeks 1700, Pater Saccheri een meetkunde opbouwde, in wier grondslagen hij dat axioma verwierp, in de hoop zoodoende op tegenspraak te stuiten; de tegenspraak bleef echter uit. Het werken van Gauss, Bolyai en Lobatschefsky in deze richting is te bekend, dan dat we daarop nader behoeven in te gaan. Het resultaat van hun bemoeiïngen werd door de meeste andere wiskunstenaars met spot ontvangen, totdat de werken van Beltrami, Helmholtz, Riemann en Klein daarin verandering brachten, zoodat *nu* Prof. Mansion durft zeggen: „il n'est plus possible aujourd' hui de bien savoir la géométrie ordinaire (euclidienne) sans connaître la géométrie non-euclidienne." Daarbij komen nog dat ook de ontwikkeling der moderne functie-theorie en de leer van het aantal genoopt hebben, tegelijkertijd de grondslagen van de rekenkunde te herzien, en de gebleken onbetrouwbaarheid der aanschouwing. Wat dit laatste betreft, heeft Weierstrass niet-differientieerbare (en toch continue) functies ontdekt, waarmee meetkundig overeenstemmen vloeiende kromme lijnen zonder raaklijnen, ($\Sigma_{n=1}^{n=\infty} a^n \cos b^n x = a \cos bx + a^2 \cos b^2 x + a^3 \cos b^3 x + \ldots$ in inf. waarin b oneven en geheel en $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$), een feit dat eerder vloekt dan strookt met de aanschouwing; zelfs een wiskundige van de kracht van J. Serret heeft zich, in het tweede deel van zijn Differentiaal- en Integraalrekening, laten verleiden tot een verkeerde redeneering over de grootte van een gebogen oppervlak (zie Bulletin des Sciences mathématiques et physiques, Onzième Année, No. 1, en bl. 120, jrg. II, van het W. T.)

En zoo vindt men herhaaldelijk bij wiskundigen van professie fouten, ontstaan door te lezen uit een figuur, die het algemeen geval schijnt te vertolken en toch slechts een bijzonder geval is.

Dat de grondslagen der meetkunde nog niet definitief gelegd waren blijkt o. a. ook uit den eindeloozen strijd die in de vroegere jaargangen van Hoffmann's Zeitschrift, en later ook in de Enseignement mathématique gevoerd is over het begrip: punt, rechte lijn, plat vlak, hoek, evenwijdigheid, enz.

In Schotten „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts" vindt men die discussies nog eens, meest met aanhalingen, uitgesponnen (een van de verstandigste aanhalingen is misschien die, waarin Crelle zegt: „er habe die

Ueberzeugung, es sei und werde für immer völlig unmöglich bleiben, die Begründung der Elemente der Geometrie, ebenso wie auch diejenigen der Analyse, zur Volkommenheit zu bringen".)

Den ersten „Abschnitt" wijdt Wellstein aan de critiek der grondbegrippen; in § 2 neemt hij de gebruikelijke definitie van punt onder handen, om die totaal af te maken. O.i. volkomen terecht zegt hij dat men b.v. van een zandkorreltje zich wel eenigszins kan voorstellen dat het kleiner en kleiner wordt, maar slechts zoolang tot het bijna aan het gezicht ontsnapt; van daaraf verkeeren wij volkomen in het duister, en den gang van de verkleining kunnen wij noch zien, noch ons voorstellen; dat er een limiet bestaat moeten wij gelooven of postuleeren. Men geve zich, zegt Wellstein, aan geen illusies over; mag men aannemen dat een zandkorreltje zonder ophouden kleiner wordt, dan kan men ook aannemen dat men het door een microscoop beschouwt waarvan de vergrooting in verhouding van de verkleining sterker wordt, en dan zou men aan het zandkorreltje niets merken. Als we denken aan het leven van splijtzwammen, algen en bakteriën, aan dat van planten- en diercellen met hunne fijne structuur, als we bedenken dat in de menschelijke eicel een hoog georganiseerd wezen met al de eigenaardigheden in de toekomst van zijn lichaamsbouw, zijn karakter en zijn verstand klaar ligt, moeten we inzien dat het klein alleen beteekenis heeft, als het in verband gebracht wordt met onze zintuigen; Wellstein voegt er nog bij, dat voor een anders gevormde intelligentie het zintuigelijk onderscheid tusschen groot en klein kan wegvallen, waarop men hem zou kunnen antwoorden dat voor een dergelijk intellect *onze* meetkundeboeken niet geschreven zijn; met deze tegenwerping wordt aan de hoofdzaak van zijn beweren niets van de waarde ontnomen.

Even duidelijk doet hij uitkomen dat de gebruikelijke definitie van vlak (in 't algemeen) geen steek houdt; er zijn vlakken die, in hun geheel, geen oppervlak van een lichaam, m. a. w. scheiding van twee lichamen zijn kunnen, b.v. het zoogenaamde blad van Möbius (dat men kan maken als men in een rechthoekige strook papier een wrong of kink maakt, en dan de uiteinden tegen elkaar plakt); wilde men probeeren éénen kant met een zekere stof te bedekken, dan zou ten slotte het heele figuur in

die stof zitten. Verder kan men geen nauwkeurige voorstelling hebben van een absoluut glad en oneindig dun vlak; want, wat het laatste betreft, als we, om zoo te zeggen, twee materieele vlakken hebben die zeer dun zijn, en weinig in dikte verschillen, kunnen we niet aangeven welke de dunste is; en zoo is het ook met de gladheid. Zelfs de oppervlakte van een vloeistof is niet volstrekt effen; omdat de vloeistoffen voortdurend tallooze deeltjes uitstooten, hebben ze evenmin een bepaald oppervlak als een bijenzwerm. En van zulke nevelachtige voorstellingen moet men nu door een grensproces tot iets volkomen bepaalds en nauwkeurigs komen?

En nog meer zwarigheden en tegenspraak ontmoet men als men de rechte lijn en het platte vlak wil definieeren. Een grove, materiëele lijn kan geen nauwkeurige voorstelling en ook geen nauwkeurig geometrisch begrip geven; ook is een lichtstraal niet iets wat in zijn richting ondeelbaar is; „zudem hat er die durch den Schwingungs zustand bedingte Seitlichkeit." Nog minder gaat het aan de rechte lijn te definieeren als dat wat bij de draaiïng van een lichaam om twee punten op zijn plaats blijft; daarmee haalt men de beweging met al hare raadselen in de Meetkunde; bovendien kan men zich daarbij niets voorstellen, en nog minder kan men uit deze definitie bruikbare eigenschappen halen.

Over de vicieuse bepaling „Kortste afstand" hoeven we heelemaal niet te spreken.

Ook tegen het oneindig doen voortloopen van een rechte lijn heeft Wellstein bezwaar, daar noch de ervaring, noch de voorstelling van zoo iets een beeld kan geven. Verder toont hij aan dat men ook door overgang tot grenzen bij bestaande lichamen niet tot het nauwkeurig mathematisch begrip van plat vlak komen kan. „Ebene und Gerade können also nur durch Eigenschaften .... definiert und damit überhaupt ins Dasein gerufen werden."

Verder keurt schrijver af de gebruikelijke definitie van gelijkheid van lijnen en hoeken. Onstoffelijke zaken, als lijnen en hoeken, zegt hij, kan men niet op elkaar leggen. Of, vraagt hij, moet men zich de beweging, die daarvoor noodig is, alleen voorstellen? „Aber was ist Bewegung?"

Deze eenvoudige bedenkingen tegen de ouderwetsche grondslagen der meetkunde hebben we, vrij uitvoerig, aangehaald, om de noodzakelijkheid te doen inzien van

een grondwetsherziening op meetkundig gebied. Daar we nu echter pas aan bl. 14 zijn, en deel II 604 bladzijden telt, dienen we ons, wat de rest van het boek aangaat te beperken. En dan beginnen we met er op te wijzen dat de schijver in hoofdzaak de opvatting van Hilbert deelt. Deze heeft, zooals men weet, in zijn „Grundlagen der Geometrie" (Leipzig, Teubner) de meetkunde opgebouwd uit een stel axioma's over punten, rechte lijnen, platte vlakken, enz.; bij het opstellen van die axioma's denkt hij, volgens zijn beweren, heelemaal niet aan de analogie met werkelijk bestaande lijnen en vlakken, maar definieert b.v. eene rechte lijn aldus: „een rechte lijn is bepaald door twee punten", zonder zich verder daarbij iets voor te stellen Behalve dat deze theorie op dit oogenblik nog niet geheel uitgewerkt is, en voor zoover ze afgewerkt heet, tamelijk diepzinnig en „schwerfällig" is, zit ze, zooals Poincaré opmerkt, nog voor het bezwaar dat men bij de toepassing op, of wil men, den terugkeer tot de „natuurlijke" of „materieele" geometrie de moeilijkheid slechts verplaatst ziet.

Vlekjes in het overigens mooie werk van Wellstein en Weber zijn, volgens onze meening, de onzekerheid waarin zij bij verschillende uiteenzettingen den lezer laten, of zij uitgaan van de ouderwetsche of van de nieuwerwetsche grondslagen, en verder het feit dat het peil, waarop zij zich den lezer voorstellen, op verschillende plaatsen in het boek verschillend is. Om hen in hun werken met bollen-bundels en -netten te volgen moet men op een heel wat hooger peil staan, dan b.v. om te volgen wat ze aan het einde van hun boek vertellen over de oppervlakken van den tweeden graad.

Enkele karakteristieke plaatsen van het boek nagaande vinden we in § 6, Natürliche Geometrie, de verklaring waarom de elementaire meetkunde, in weerwil van hare verkeerde grondslagen, niet tot logische tegenspraak leidt. Schrijver zegt dat dit daarvan komt, dat men later van de gebrekkige definities geen gebruikt maakt. Wat hindert het dat een cirkel-omtrek enkele tienden milimeters dik is?

Eerst bij de theorie der functies doet zich de *noodzakelijkheid* naar punten zonder uitgebreidheid, en lijnen zonder dikte gevoelen. Alleen in de theorie van de evenwijdige lijnen, en overal waar het begrip „oneindig" een rol speelt,

is door het ontoereikende van de geïdialiseerde grondbegrippen tegenspraak ontstaan. Verder vindt Wellstein gelegenheid hieruit de noodzakelijkheid te betoogen om het meetkunde onderwijs te beginnen met uit de aanschouwing „Rohmaterial" te verzamelen, en verder te wijzen op het boek van Pasch, „Vorlesunger über neuere Geometrie", waarin een soort physische meetkunde behandeld wordt wordt (punten zijn daarin „materielle Körper, desen Teilung sich mit den Beobachtungsgrenzen nicht verträgt"). Verder worden kort aangeduid de verschillende „Geometrieën", en de overgang van de eene tot de andere door het machtig hulpmiddel „Inversie." Na een philosophische beschouwing van de grondslagen der meetkunde komt schrijver in „Dritter Abschnitt" tot de „Grundlegung der projektiven Geometrie"; deze „soll uns zugleich die Grundlage für das definitive Lehrgebäude der Euklidischen Geometrie abgeben."

„Vierter Abschnitt" behandelt de gewone „Euclidische" meetkunde, maar natuurlijk in geheel modernen zin. Daar knoopt hij aan vast een elementair-geometrische leer van de kegelsneden (als bepaling van kegelsneden meetkundige plaatsen gebruikend). Dan volgt de vlakke Trigonometrie en Polygonometrie als „fünfter Abschnitt."

Zeer interessant is de „Sphärik und sphärische Trigonometrie", niet zoo zeer in 't begin als later, waar het begrip spherische driehoek langzamerhand uitgebreid wordt. Een eerste uitbreiding (die van Möbius) is dat men aan de zijden niet meer de voorwaarde stelt dat ze moeten liggen tusschen 0 en π, maar tusschen 0 en 2π; zoodoende bepalen drie punten 16 driehoeken. Een tweede uitbreiding is dat men de zijden en hoeken beschouwt die veelvouden van 2π verschillen; hierbij geven drie punten oneindig veel driehoeken, die zich door 32 typen veraanschouwelijken laten (Deze uitbreiding is door Study uitgewerkt).

En ten slotte komt men tot den definitieven „Studyschen Dreiecksbegriff": „Unter einem Dreieck verstehen wir den Inbegriff der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ, unbekümmert um ihre zufällige Lage auf der Kugel."

In verband hiermee zijn dus alle driehoeken die met eenzelfden driehoek congruent en symetrisch zijn, voor zoover ze slechts dezelfde zijden en hoeken hebben, als een en dezelfde driehoek op te vatten.

Beschouwingen over groepentheorie en toegepaste boldriehoeksmeting besluiten dit hoofdstuk.

In de analytische meetkunde van het platte vlak wordt natuurlijk weer de nadruk gelegd op de theorie der kegelsneden („dieses schönste und höchste Gebiet der Elementargeometrie"). Stereometrie en analytische meetkunde in de ruimte worden, in het slot, nogal spaarzaam behandeld.

Natuurlijk geeft deze inhoudsopgave slechts een flauw beeld van het hoogst belangrijke boek; de inspanning die de lectuur vordert, wordt ruimschoots beloond. Een definitieve oplossing geeft het boek echter niet, en beweert het ook niet te geven; o. i. zal wel nooit onwaar gemaakt worden wat Schotten in zijn bovengenoemd werk aanhaalt „Aus verborgenen Tiefen heraus entwickelen sich die Elemente einer Vernunft-Wissenschaft, wie z. B. der Mathematik, und in eine unendliche Höhe hinauf streben sie. Was in der tieferen Tiefe und in der höheren Höhe liegt, bleibt für immer verborgen." C. A. Cikot.

Dit stukje was al geschreven, toen we in Hoffmann's Zeitschrift (laatste aflevering van 1905) lazen dat van het eerste deel een verbeterde en vermeerderde tweede druk is verschenen: twee jaar na den eersten. C. A. C.

Vraagstukken.

Door een misverstand is bij de vorige aflevering het slotvel (vel 9) niet bijgevoegd, doch vervangen door het 1e vel „Examenopgaven." Daardoor bevatte de vorige afl. geen opgaven van nieuwe vraagstukken.

Bij deze (3e) afl. is het achtergebleven vel gevoegd, (den termijn 25 Mei verandere men in 25 Sept.) er zijn nu echter geen nieuwe opgaven gegeven.

Er ontstaat daardoor een hiaat van 3 maanden, doch dit is de redactie welkom, omdat, door overmaat van andere copie, het afdrukken der vraagstukken vertraging heeft ondergaan.

Bij deze mededeeling nog een verzoek: De voorraad ingezonden vraagstukken begint op te geraken; zouden de lezers willen zorgen voor nieuwen toevoer? De vraagstukken dienen zwaarder te zijn dan die in den „Vriend der Wiskunde."

Vraag en Antwoord.

Vraag 8. In de opgaven over *de eindexamens der Hoogere Burgerscholen in Ned.-Indië 1870—1904*, uitgegeven door Dr. J. G. van Deventer, lees ik op bl. 57:

1887. No. 3. Bereken het oppervlak van een regelmatigen zevenhoek in een cirkel, als de straal 15 M. is.

Antwoord. Als hij te construeeren was, zou de oppervlakte zijn 615,69 M^2.

Is dit antwoord goed geformuleerd? X. te B.

Antwoord. O. i. niet. Al is een reg. zevenhoek niet met liniaal en passer te construeeren, hij bestaat, en men kan zijn grootte evengoed becijferen als van een ellips of van een parabolisch segment of van een cirkelsector met een hoek van 10°. Q.

Vraag 9. Van wien is de paradox afkomstig

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots$$

B. te P.

Antwoord. Van Jacob Bernoulli (1654—1795). Het was in den tijd, dat men zich over de convergentie en divergentie van oneindig voortloopende reeksen minder bekommerde, en in de ontwikkeling

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \ldots.$$

eenvoudig $r = 1$ stelde. Q.

Vraag 10. Is er een *wiskundig* bewijs voor (kansrekening, waarschijnlijkheidsrekening) deze stelling:

De waarschijnlijkheid, dat een regel goed is, neemt toe met het kwadraat der verhouding, waarmee het aantal onderzochte gevallen toeneemt. V. Th. van de Ven.

Correspondentie.

De op bladz. 125 vermelde wijze van teekenen van een hoek is voor nederlandsche militairen niets nieuws. In het oude Badon Ghyben vindt men de methode aangegeven.

In 1856 verscheen bij Gebr. v. Cleef te 's-Gravenhage een boekje van ± 300 bladz. door J. van Loghem, privaatonderwijzer te Leyden: „Theorie der harmonisch-evenredige getallen, harmonische snijding der lijnen en der transversalen. Handboek ten gebruike van Gymnasiën, Instituten en tot Zelfonderricht.

Dit zeer aan te bevelen boekje, dat een aantal aardige vraagstukken en bewijzen bevat, is blijkbaar nog steeds in den handel.

Nieuw verschenen werken.

(Door de redactie ontvangen.)

Uitgaven van Grauthier-Villars, Parijs:

REGIS TRILLY. Les procédés de commande à distance au moyen de l'électricité, 1906. Serie: Actualités scientifiques.

L. COUTURAT. L'algèbre de la logique. Serie Scientia No. 24. 2 frs.

JULES TANNERY. Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales.
Tome premier. 419 bladz. 1906.
„ second. 633 „ „

C. A. LAISANT. Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance.
Genève, Librairie Georg & Cie.
Parijs, „ Hachette & Cie. 1906.

Dr. A. v. THYN. Leerboek der Algebra met Vraagstukken. Derde deel. Groningen, J. B. Wolters, 1906, f 1,60.

J. v. d. GRIEND Jr. Planimetrische vraagstukken voor hoogere burgerschool en gymnasium. Zwolle, W. E. F. Tjeenk Willink, 1905. f 1.25 (gebonden f 1.50).

Antwoorden op de planimetrische vraagstukken, f 0.40.

De redactie had het genoegen kennis te maken met de „Openbare les gehouden den 24sten Januari 1906 bij de opening zijner lessen als privaat-docent aan de Rijks-univertiteit te Groningen door Dr. Fred. Schuh, over: *Waarschijnlijkheidsrekening en het Theorema van Bernouilli.*" (Sneek, J. F. v. Druten).

De dissertatie van den heer P. Middel: De Trisectie van den Hoek. Groningen, 1906.

Twee constructies voor de raaklijn aan de cissoïde

DOOR

A. SCHRÖDER (Utrecht), en

F. J. VAES (Rotterdam).

De cissoïde wordt verkregen door van uit een vast punt O voerstralen te trekken naar een lijn AC, die een door O gaanden cirkel raakt in het tegenpunt van O, en daarop stukken CP af te passen gelijk aan koorde OB, (of wat hetzelfde is OP = BC te maken.)

De vergelijking van de cissoïde in poolcoördinaten is

$$\rho = \frac{a}{\cos \phi} - a \cos \phi,$$

als OA $= a$, en $\angle$ COA $= \phi$ is, waaruit met OA als x-as, en O als oorsprong volgt:

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

De bekende constructie van Roberval kan worden toegepast om de raaklijn in een willekeurig punt van de cissoïde te bepalen.

Hier volgen twee andere constructies:

Constructie van A. Schröder.

De cissoïde van Diocles kan men ontstaan denken door inversie van een parabool met den top als inversiecentrum. Want passen wij op de vergelijkingen van de parabool:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

de inversieformules: $x = \dfrac{x'}{x'^2 + y'^2}$, $y = \dfrac{y'}{x'^2 + y'^2}$ toe,

daarbij aannemende dat de inversiestraal de eenheid is, dan vinden wij na een korte herleiding:

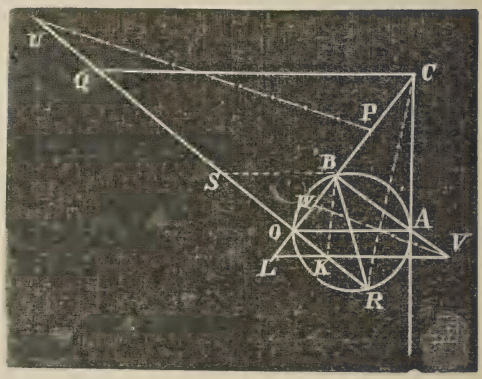
$$y'^2 = \frac{2\,p\,x'^3}{1 - 2\,p\,x'},$$

zijnde de vergelijking van de cissoïde van Diocles.

Stel dat wij nu in P de raaklijn willen construeeren. De inverse figuur van de raaklijn is een cirkel, die gaat door O en die in P′ (het inverse punt van P) de parabool aanraakt. Een cirkel snijdt een kegelsnede in 't algemeen in 4 punten, die zoodanig zijn gelegen, dat de verbindingslijnen twee aan twee antiparallel loopen met de as van de kegelsnede. In dit geval vallen 2 snijpunten in P′ samen en wij kunnen dus het vierde snijpunt Q′ vinden door △ OP′S gelijkbeenig te maken Het inverse punt Q van Q′ ligt derhalve zoowel op de cissoïde als op de raaklijn. De verbindingslijn van P en Q geeft dus de raaklijn in P aan de cissoïde.

Constructie van F. J. Vaes.

Wanneer de afstand CP onveranderlijk bleef, dan zou men de snelheid van P dadelijk kunnen aangeven, doordien deze loodrecht zou zijn op de lijn, die P verbindt met het oogenblikkelijk draaiïngsmiddelpunt Q (CQ ⊥ AC, OQ ⊥ OC). Doch P beweegt sneller, omdat de afstand CP kleiner wordt, en wel nadert P tot C met dezelfde snelheid als B tot O.



Wanneer het punt B den cirkel doorliep (dus niet met C mede opschoof), dan zou het oogenblikkelijk draaiïngsmiddelpunt R zijn (OR ⊥ OB, BR normaal van den cirkel). Voor de beweging van B naar O is dus R de pool.

Nu moet P echter in tegenovergestelde richting van B bewegen; denkt men dus OS = OR gemaakt, dan kan men S beschouwen als pool voor de beweging, die P dichter bij C brengt.

De snelheid van P langs de lijn OC is dus samengesteld

uit de draaiïngssnelheid van O om pool Q en die van O om pool S. Wanneer men nu QU = OS neemt, dan zal een draaiïng om U als pool juist de vereischte draaiïngssnelheid van O, en dus schuivingssnelheid van P geven. Bijgevolg is UP de normaal van de cissoïde.

Omdat OR = AB is, kan men U onmiddellijk vinden.

De constructie is zeer eenvoudig, doch het punt U valt vrij spoedig buiten de grenzen der teekening. Men kan dan een wijziging toepassen. Immers $\triangle$ OAB $\backsim$ $\triangle$ OCQ; zoodra dus in den 1en driehoek een lijn VW is aan te wijzen gelijkstandig met UP, dan is de richting van UP bekend. Men heeft dan:

$$AV : QU = AB : OQ,$$
$$AV : AB = AB : OQ.$$

Doch ook is AB : OQ = OB : OC, dus AV : AB = OB : OC, of als men middellijn BR trekt:

$$AV : OB = OR : OC,$$

waardoor onmiddellijk een lengte OK = AV kan worden gevonden. Het punt W ligt zoodanig, dat

$$OW : OB = CP : CO,$$

of

$$OW : OB = OB : OC.$$

Een lijn door K // AO bepaalt dus het punt V, en tegelijk een punt L, zoodanig dat OL = OW.

De constructie wordt daardoor:

Trek BR door het middelpunt van den cirkel, verbindt O met R, trek BK // CR, LV door K // OA; maak OW = OL, dan staat VW loodrecht op de raaklijn in P.

Uit de Theorie der Algebraïsche Vergelijkingen

DOOR

K. BES (Tilburg).

(*Vervolg van blz. 57*).

Geval I: $m = n$.

§ 31. Om in dit geval, waarin de assemblant (1) een determinant is, te onderzoeken of er voor de vergelijkingen (8) een wortelstelsel bestaat, vermenigvuldige

men deze vergelijkingen achtereenvolgens met de onderdeterminanten van de elementen eener willekeurige kolom van den determinant der coëfficienten, bijv. de l^{de}, en telle de uitkomsten op. Men verkrijgt dan, als men de waarde van den determinant der coëfficienten door A voorstelt, de vergelijking:

$$A\,x_l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

waarin l alle waarden van 1 tot n kan hebben. Aan het stelsel vergelijkingen (13) kan alleen voldaan worden door waarden der onbekenden, die niet nul zijn, indien $A = 0$ is.

Is deze voorwaarde vervuld, dan vormen de onderdeterminanten van de elementen eener willekeurige rij van den determinant der coëfficienten een wortelstelsel voor de vergelijkingen (8), zooals volgt uit § 8 en § 9 verg. (2) en (3).

Vermenigvuldigt men in het geval van $m = n$ de vergelijkingen (9) achtereenvolgens met de onderdeterminanten van de elementen eener willekeurige rij van den determinant (1), bijv. met die der k^{de} rij, en telt daarna de uitkomsten op, dan verkrijgt men de vergelijking:

$$A\,p_k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

waarin k alle waarden kan hebben van 1 tot n.

Ook aan het stelsel vergelijkingen (14) kan alleen voldaan worden door waarden der onbekenden, die niet nul zijn, indien $A = 0$ is.

Is deze voorwaarde vervuld, dan vormen de onderdeterminanten van de elementen eener willekeurige kolom van den determinant (1) een wortelstelsel voor de vergelijkingen (9).

Uit het voorgaande leidt men de volgende eigenschappen af:

1. *Is in een stelsel van n lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden de determinant der coëfficienten niet gelijk aan nul, dan bestaat er geen stelsel waarden, dat aan al deze vergelijkingen voldoet; evenmin zijn de vergelijkingen door eene lineaire betrekking verbonden.*

2. *Is in een stelsel van n lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden de determinant der coëfficienten gelijk aan nul, terwijl zijne onderdeterminanten niet alle gelijk aan nul zijn, dan bestaat er voor deze vergelijkingen een wortelstelsel en zijn de vergelijkingen tevens door eene lineaire betrekking verbonden.*

Geval II: $m > n$.

§ 32. In dit geval kan er voor de vergelijkingen (8) dan alleen een wortelstelsel bestaan, als alle determinanten der hoogste orde, die in den assemblant (1) bevat zijn, gelijk aan nul zijn. Dit volgt onmiddellijk uit de eigenschappen vermeld in de vorige paragraaf.

Zijn in dit geval niet alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten gelijk aan nul, dan kan aan het stelsel vergelijkingen (8) op geen andere wijze worden voldaan, dan door voor alle onbekenden nullen te nemen.

Verwisselt men in den assemblant (1) de rijen met de kolommen, waardoor geen verandering wordt gebracht in het aantal en de waarde der determinanten, die in den assemblant bevat zijn, dan gaan de vergelijkingen (8) en (9) in elkaar over. De gevolgtrekkingen, die men kan maken ten opzichte der vergelijkingen (8) voor het geval, dat $m > n$ is, gelden dus voor de vergelijkingen (9) voor het geval, dat $m < n$ is, en omgekeerd.

Geval III^a: $m < n$,
alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten zijn van nul verschillend.

§ 33. In dit geval bestaan er geen wortelstelsels voor de vergelijkingen (9). De vergelijkingen (8) zijn dus niet door lineaire betrekkingen verbonden. Het zal nu in de eerste plaats te doen zijn om de volgende belangrijke eigenschap te bewijzen:

Aan m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $m < n$, kan worden voldaan door $n - m$, maar niet door meer dan $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels.

Is $n = m + 1$, dan wordt aan het stelsel lineaire homogene vergelijkingen voldaan door voor iedere onbekende te substitueeren den determinant, dien men verkrijgt door uit den assemblant der coëfficienten de kolom weg te laten, gevormd door de coëfficienten dier onbekende in de gegeven vergelijkingen, en wel, voorzien van het teeken $+$ of $-$, naar gelang de weggelaten kolom door een even of een oneven aantal kolommen wordt voorafgegaan. Door deze substitutie verkrijgt men namelijk voor het eerste lid van

iedere vergelijking een determinant, die twee gelijke rijen heeft.

Is het verschil tusschen n en m grooter dan één, zoo stelle men $n - m - 1$ onbekenden gelijk aan nul. De vergelijkingen gaan hierdoor over in een stelsel van m lineaire homogene vergelijkingen met $m + 1$ onbekenden. De waarden der onbekenden, die niet gelijk aan nul gesteld zijn, kunnen nu op de boven vermelde wijze worden uitgedrukt door determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten.

Door telkens $n - m - 1$ andere onbekenden gelijk aan nul te stellen, verkrijgt men op deze wijze voor de gegeven vergelijkingen in het geheel $\binom{n}{m+1}$ wortelstelsels. Deze wortelstelsels zijn echter niet alle onafhankelijk van elkaar.

Men kan $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels verkrijgen door van $n - m$ bepaalde onbekenden telkens $n - m - 1$ onbekenden gelijk aan nul te stellen, en de waarden der overige onbekenden op de aangegeven wijze te berekenen. De $n - m$ wortelstelsels, die men op deze wijze verkrijgt, zijn onafhankelijk, omdat hun assemblant een determinant bevat, waarvan alle elementen nullen zijn, behalve die van een der diagonalen, zoodat deze determinant niet gelijk aan nul is.

Hiermede is het eerste deel der voorgestelde eigenschap bewezen.

Ten einde het tweede deel te bewijzen, brengt men het stelsel van m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden terug tot één lineaire homogene vergelijking met $n - m + 1$ onbekenden.

Daartoe vormt men uit $m - 1$ naar willekeur gekozen kolommen van den assemblant der coëfficienten een assemblant, vermenigvuldigt iedere vergelijking (met inachtneming van den boven vermelden regel voor de teekens $+$ of $-$) met den determinant uit dezen assemblant, welke de coëfficienten dezer vergelijking niet bevat, en telt vervolgens de verkregen producten op. Hierdoor worden de $m - 1$ onbekenden, die op de $m - 1$ naar willekeur genomen kolommen betrekking hebben, uit de vergelijkingen geëlimineerd, waardoor men één lineaire homogene vergelijking tusschen de $n - m + 1$ overige onbekenden verkrijgt.

Deze vergelijking wordt *eindvergelijking* genoemd. De

wortelstelsels, die aan de m gegeven vergelijkingen voldoen, moeten ook voldoen aan de eindvergelijking.

Voldeden aan de m gegeven vergelijkingen meer dan $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels, dan zouden deze, in de eindvergelijking gesubstitueerd, een stelsel van meer dan $n - m$ vergelijkingen vormen tusschen de $n - m + 1$ coëfficienten der eindvergelijking als onbekenden. Daar aan dit stelsel vergelijkingen voldaan moet kunnen worden door een stelsel waarden voor de onbekenden, nullen uitgezonderd, zoo zou daarvoor vereischt worden (§ 32), dat alle determinanten bevat in den assemblant der coëfficienten gelijk aan nul zijn. Deze coëfficienten zijn nu de boven bedoelde wortelstelsels, die aan de gegeven vergelijkingen voldoen. Hieruit volgt, dat meer dan $n - m$ wortelstelsels der gegeven vergelijkingen niet alle onafhankelijk kunnen zijn.

§ 34. Uit het verhandelde in de voorgaande paragraaf vloeit nog de volgende eigenschap voort:

Ieder wortelstelsel, dat aan een stelsel van m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden voldoet, is door eene lineaire betrekking verbonden aan $n - m$ bepaalde onafhankelijke wortelstelsels.

Hierbij valt op te merken, dat eenige coëfficienten dezer lineaire betrekking nullen kunnen zijn.

§ 35. Als men uit m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden $m - 1$ dier onbekenden elimineert, verkrijgt men, zooals in § 33 gebleken is, als eindvergelijking eene lineaire homogene vergelijking tusschen de $n - m + 1$ overige onbekenden. Het aantal eindvergelijkingen, die men op deze wijze kan verkrijgen, bedraagt $\binom{n}{m-1}$.

Ten einde een regel te kunnen opstellen, volgens welken men de coëfficienten der eindvergelijkingen kan bepalen, is het noodig de volgende eigenschap te vermelden, welke onmiddellijk voortvloeit uit de vergelijkingen (2) van § 8:

Stelt men van n onafhankelijke lineaire homogene functiën met n onafhankelijk veranderlijken $n - 1$ dier functiën gelijk aan nul, en neemt men tot wortels van de $n - 1$ lineaire homogene vergelijkingen, die men daardoor verkrijgt, de determinanten van de hoogste orde bevat in den assemblant hunner coëfficienten, voorzien van de teekens $+$ of $-$, welke aan die determinanten toekomen, dan verkrijgt men door substitutie van deze wortels in de overblijvende functie steeds dezelfde

volstrekte waarde, namelijk den determinant der coëfficienten van de n lineaire homogene functiën, onverschillig welke n — 1 functiën gelijk aan nul gesteld zijn. Aan dezen determinant geve men vervolgens het teeken + of —, naar gelang het ranggetal der functie, waarin gesubstitueerd wordt oneven of even is.

§ 36. Om de eindvergelijkingen te bepalen, kan men op het voetspoor van Bezout te werk gaan, als volgt:

Men vermenigvuldigt de vergelijkingen (8) achtereenvolgens met de grootheden $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_m$ en bepaalt daarna hunne som. In de vergelijking, die men hierdoor verkrijgt, stelt men de coëfficienten der $m - 1$ onbekenden gelijk aan nul, die men uit het stelsel vergelijkingen wil elimineeren. De $m - 1$ lineaire homogene vergelijkingen, die men hierdoor verkrijgt tusschen de m grootheden $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_m$, bepalen de waarden dezer grootheden. Vervolgens substitueert men de gevonden waarden in de coëfficienten der overige termen. Deze herleiden zich dan tot determinanten van de m^{de} orde, waaraan de teekens + of — gegeven moeten worden, in overeenstemming met den regel vermeld in de vorige paragraaf.

Hierdoor verkrijgt men de eigenschap:

De termen eener eindvergelijking hebben tot coëfficienten determinanten, die uit den assemblant der coëfficienten van het stelsel vergelijkingen verkregen worden door weglating van de kolommen, wier elementen behooren bij de onbekenden, die in de eindvergelijking overblijven, met uitzondering van de kolom, die betrekking heeft op de onbekende, waartoe de voor te stellen coëfficient behoort. Aan iederen term der eindvergelijking behoort het teeken + of — gegeven te worden, naar gelang aan dien term voorafgaat een even of een oneven aantal der uit het stelsel vergelijkingen geëlimineerde onbekenden.

Opmerking Om het maken van fouten te voorkomen is het goed zich te houden aan den voorgestelden regel, wat de teekens der termen betreft. Men kan echter, zoo men zulks verkieslijk acht, iedere eindvergelijking als nog met — 1 vermenigvuldigen.

§ 37. De $\binom{n}{m-1}$ eindvergelijkingen, die men op de vermelde wijze uit het stelsel vergelijkingen (8) kan afleiden, zijn niet onafhankelijk van elkaar, maar door lineaire betrekkingen verbonden. Op verschillende manieren kan men

m eindvergelijkingen uitkiezen, die onafhankelijk zijn. Daartoe elimineere men uit het stelsel vergelijkingen (8) van m bepaalde onbekenden er telkens $m - 1$. De aldus verkregen m eindvergelijkingen zijn onafhankelijk, omdat de assemblant hunner coëfficienten een determinant van de hoogste orde bevat, die niet nul is, daar al zijne elementen nullen zijn, behalve die van een der diagonalen.

Meer dan m eindvergelijkingen kunnen niet onafhankelijk zijn, want, zoo zulks het geval was, men zou uit de gegeven vergelijkingen een stelsel lineaire homogene vergelijkingen hebben afgeleid, waaraan niet voldaan zou kunnen worden door alle $n - m$ onderling onafhankelijke wortelstelsels der gegeven vergelijkingen.

§ 38. Vormt men uit $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels, die aan m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden voldoen, een assemblant, dan bestaat tusschen de determinanten der hoogste orde van dezen assemblant en de supplementaire determinanten van den er mede verwanten assemblant der coëfficienten eene constante verhouding.

Men kan dit bewijzen door substitutie van de $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels, die aan de gegeven vergelijkingen voldoen, in de eindvergelijkingen, die men uit het stelsel onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen kan afleiden. Hierdoor gaat iedere eindvergelijking over in een stelsel van $n - m$ lineaire homogene vergelijkingen met $n - m + 1$ onbekenden, welke onbekenden de determinanten zijn, waaruit de coëfficienten der eindvergelijking bestaan. Door oplossing van deze vergelijkingen blijkt onmiddellijk de juistheid der stelling:

De assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels, die voldoen aan m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, en de assemblant gevormd door de coëfficienten dezer vergelijkingen zijn supplementair.

Opmerking. Deze eigenschap verschaft het middel de coëfficienten der eindvergelijkingen, die bestaan uit determinanten ontleend aan den assemblant der coëfficienten, te vervangen door determinanten ontleend aan den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels.

§ 39. Het kan gebeuren, dat aan een stelsel van m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden voldaan wordt door meer dan $n - m$ wortelstelsels, welke door lineaire betrekkingen verbonden zijn.

Stelt men zich nu het geval voor, dat aan m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden voldaan wordt door n_1 wortelstelsels, die door n_2 lineaire betrekkingen verbonden zijn, welke weder door n_3 en deze door n_4 lineaire betrekkingeu verbonden zijn. In dit geval vertegenwoordigen de n_1 afhankelijke wortelstelsels een stelsel van $n_1 - n_2 + n_3 - n_4$ onafhankelijke wortelstelsels.

Daar het grootste aantal onafhankelijke wortelstelsels, die aan de gegeven vergelijkingen voldoen, $n - m$ is, zoo verkrijgt men hierdoor de betrekking:

$$m = n - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

welke uitdrukt, dat het aantal onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden verminderd met het aantal onafhankelijke wortelstelsels, die aan deze vergelijkingen voldoen.

Is de betrekking (15) vervuld, dan kan men besluiten, dat de n_1 afhankelijke wortelstelsels met hunne betrekkingen van afhankelijkheid gelijk staan met een stelsel van $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels.

§ 40. Als in een stelsel van m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden alle coëfficienten reëele getallen zijn, dan zijn de $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels, die men uit den assemblant der coëfficienten kan afleiden, insgelijks reëele getallen. Uit deze $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels kan een onbepaald aantal andere wortelstelsels worden afgeleid door middel van lineaire betrekkingen, waarvan de coëfficienten willekeurige getallen zijn. Neemt men hiervoor imaginaire of complexe getallen, zoo blijkt de juistheid der volgende stelling:

Voor een stelsel van m lineaire homogene vergelijkingen, wier coëfficienten reëele getallen zijn, en die n onbekenden bevatten, waarbij $m < n$, bestaan een onbeperkt aantal wortelstelsels, wier elementen complexe of imaginaire getallen zijn.

§ 41. Ter toelichting van hetgeen in de vorige paragrafen over de lineaire homogene vergelijkingen is gezegd, wordt nu het bijzondere geval beschouwd, waarin men heeft $m = 4$ en $n = 7$. Het stelsel vergelijkingen wordt dan voorgesteld door:

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + a_3^1 x_3 + a_4^1 x_4 + a_5^1 x_5 + a_6^1 x_6 + a_7^1 x_7 = 0, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + a_4^2 x_4 + a_5^2 x_5 + a_6^2 x_6 + a_7^2 x_7 = 0, \\ a_1^3 x_1 + a_2^3 x_2 + a_3^3 x_3 + a_4^3 x_4 + a_5^3 x_5 + a_6^3 x_6 + a_7^3 x_7 = 0, \\ a_1^4 x_1 + a_2^4 x_2 + a_3^4 x_3 + a_4^4 x_4 + a_5^4 x_5 + a_6^4 x_6 + a_7^4 x_7 = 0, \end{array}\right\} \quad (16)$$

en de assemblant der coëfficienten door

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 & a_7^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & a_6^2 & a_7^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 & a_6^3 & a_7^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 & a_6^4 & a_7^4 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Verondersteld wordt, dat alle determinanten der hoogste orde bevat in dezen assemblant van nul verschillen. Zij zullen, op de wijze als in § 2 vermeld, worden voorgesteld door $A_{1,2,3}$, $A_{2,3,7}$, enz.

Op de wijze als vermeld in § 33 kan men voor de vergelijkingen (16) in het geheel $\binom{n}{m+1} = 21$ wortelstelsels afleiden, die $n - m - 1 = 2$ nullen als elementen bevatten. Onder deze wortelstelsels bevinden zich echter niet meer dan $n - m = 3$, die onafhankelijk zijn. Een stelsel van drie zulke onafhankelijke wortelstelsels der vergelijkingen (16) is bijv. bevat in de rijen van den assemblant:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{1,2,3} & -A_{1,2,4} & A_{1,2,5} & -A_{1,2,6} & A_{1,2,7} \\ 0 & -A_{1,2,3} & 0 & A_{1,3,4} & -A_{1,3,5} & A_{1,3,6} & -A_{1,3,7} \\ A_{1,2,3} & 0 & 0 & -A_{2,3,4} & A_{2,3,5} & -A_{2,3,6} & A_{2,3,7} \end{vmatrix} \quad (18).$$

Hieruit kan men door middel van drie onafhankelijke lineaire betrekkingen drie andere onafhankelijke wortelstelsels afleiden, die geen nullen onder hunne elementen bevatten.

De assemblant

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 & x_6^1 & x_7^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 & x_7^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & x_6^3 & x_7^3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

stelt nu drie zulke onafhankelijke wortelstelsels voor. De

determinanten der hoogste orde bevat in dezen assemblant zullen op de bekende wijze worden voorgesteld door $X_{4,5,6,7}$, $X_{1,4,5,6}$, enz.

Uit het stelsel vergelijkingen (18) kan men op de wijze als vermeld in § 36 in het het geheel $\binom{n}{m-1} = 35$ eindvergelijkingen afleiden, waarvan het voldoende zal zijn de drie volgende te vermelden:

$$\left.\begin{aligned} -A_{5,6,7}\,x_4 - A_{4,6,7}\,x_5 - A_{4,5,7}\,x_6 - A_{4,5,6}\,x_7 &= 0, \\ -A_{3,5,6}\,x_2 - A_{2,5,6}\,x_3 - A_{2,3,6}\,x_5 - A_{2,3,5}\,x_6 &= 0, \\ A_{4,6,7}\,x_3 + A_{3,6,7}\,x_4 - A_{3,4,7}\,x_6 - A_{3,4,6}\,x_7 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (20).$$

De eerste dezer vergelijkingen wordt verkregen door de vergelijkingen (16) achtereenvolgens te vermenigvuldigen met $A^1_{4,5,6,7}$, $-A^2_{4,5,6,7}$, $A^3_{4,5,6,7}$, $-A^4_{4,5,6,7}$ en de verkregen uitkomsten op te tellen; de tweede door de vergelijkingen (16) achtereenvolgens te vermenigvuldigen met $A^1_{2,3,5,6}$, $-A^2_{2,3,5,6}$, $A^3_{2,3,5,6}$, $-A^4_{2,3,5,6}$ en daarna op te tellen; de derde door de vergelijkingen (16) achtereenvolgens te vermenigvuldigen met $A^1_{3,4,6,7}$, $-A^2_{3,4,6,7}$, $A^3_{3,4,6,7}$, $-A^4_{3,4,6,7}$ en de verkregen uitkomsten op te tellen.

Door substitutie der wortelstelsels (19) in de eindvergelijkingen (20) verkrijgt men voor ieder dezer een stelsel van $n - m = 3$ vergelijkingen, bijv. voor de laatste der vergelijkingen (20) het stelsel vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} A_{4,6,7}\,x^1_3 + A_{3,6,7}\,x^1_4 - A_{3,4,7}\,x^1_6 - A_{3,4,6}\,x^1_7 &= 0, \\ A_{4,6,7}\,x^2_3 + A_{3,6,7}\,x^2_4 - A_{3,4,7}\,x^2_6 - A_{3,4,6}\,x^2_7 &= 0, \\ A_{4,6,7}\,x^3_3 + A_{3,6,7}\,x^3_4 - A_{3,4,7}\,x^3_6 - A_{3,4,6}\,x^3_7 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (21),$$

waaruit door oplossing van de grootheden door A voorgesteld de gelijkheid:

$$\frac{A_{4,6,7}}{-X_{1,2,3,5}} = \frac{A_{3,6,7}}{X_{1,2,4,5}} = \frac{A_{3,4,7}}{X_{1,2,5,6}} = \frac{A_{3,4,6}}{-X_{1,2,5,7}} = \text{enz.} \ldots . (22)$$

voortvloeit, welke, met inachtneming van den regel voor de teekens + en —, de eigenschap uitdrukt, dat de assemblanten (17) en (19) supplementair zijn.

Vervangt men nu, door toepassing van deze eigenschap de coëfficienten dezer eindvergelijkingen door determinanten ontleend aan den assemblant (19), dan gaat bijv. de derde vergelijking (20) over in

$$-X_{1,2,3,5}\,x_3 + X_{1,2,4,5}\,x_4 - X_{1,2,5,6}\,x_6 + X_{1,2,5,7}\,x_7 = 0\,. \quad (23)$$

$$\text{of} \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_6 & x_7 \\ x_3^1 & x_4^1 & x_6^1 & x_7^1 \\ x_3^2 & x_4^2 & x_6^2 & x_7^2 \\ x_3^3 & x_4^3 & x_6^3 & x_7^3 \end{vmatrix} = 0\,. \quad (24).$$

Geval III^b : $m < n$,
sommige determinanten der hoogste orde
bevat in den assemblant der coëfficienten
zijn gelijk aan nul, andere niet.

§ 42. Het geval, dat eenige (niet alle) determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten gelijk aan nul zijn, vereischt eene afzonderlijke beschouwing. De vergelijkingen (8) zijn in dit geval, evenals in het vorige geval, onafhankelijk van elkaar.

De eigenschappen, die voor het vorige geval gelden, zijn ook geldig in dit geval. Nu bestaan er echter wortelstelsels, die meer dan $n - m - 1$ nullen bevatten en eindvergelijkingen, waarin minder dan $n - m + 1$ onbekenden voorkomen.

Het grootste aantal onafhankelijke eindvergelijkingen is ook in dit geval m, en het grootste aantal onafhankelijke wortelstelsels $n - m$. Ook de eigenschap, dat de assemblant der coëfficienten supplementair is met den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels, blijft in dit geval van kracht. Hieruit volgt de stelling:

Is een der determinanten der hoogste orde van den assemblant der coëfficienten van een stelsel bestaande uit m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $m < n$, gelijk aan nul, dan is dit ook het geval met den supplementairen determinant uit den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels dezer vergelijkingen, en omgekeerd.

§ 43. Als er eene lineaire betrekking bestaat tusschen $m - k$ kolommen van den assemblant der coëfficienten, zijn alle determinanten der hoogste orde gelijk aan nul, welke in deze $m - k$ kolommen bevat zijn.

Uit het voorgaande volgt nu de eigenschap:

Bestaat er tusschen $m - k$ kolommen van den assemblant der coëfficienten van m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $k < m$ en $m < n$, eene

lineaire betrekking, dan zijn in den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels alle determinanten der hoogste orde gelijk aan nul, welke geen der overeenstemmende $m - k$ kolommen bevatten.

§ 44. Zijn in den assemblant der coëfficienten alle determinanten der hoogste orde gelijk aan nul, welke bevat zijn in $m + k$ bepaalde kolommen, dan kan men eene eindvergelijking vormen, waarin alleen voorkomen de $n - m - k$ onbekenden, die betrekking hebben op de overige kolommen van dezen assemblant. Hieruit volgt de eigenschap:

Als alle determinanten der hoogste orde bevat in $m + k$ kolommen van den assemblant der coëfficienten van m onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $m < n$ en $k < n - m$, gelijk aan nul zijn, dan zijn door eene lineaire betrekking verbonden de $n - m - k$ kolommen van den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels, welke kolommen niet overeenstemmen met de $m + k$ bedoelde kolommen van den assemblant der coëfficienten.

§ 45. Is in het geval van de vorige paragraaf $k = n - m - 1$, dan verkrijgt men de eigenschap:

Zijn alle determinanten der hoogste orde gelijk aan nul, welke bevat zijn in den assemblant, dien men verkrijgt door in den assemblant der coëfficienten van een stelsel bestaande uit m lineaire onafhankelijke homogene vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $m < n$, één kolom weg te laten, dan kan aan dit stelsel vergelijkingen alleen voldaan worden door voor de onbekende, die bij de weggelaten kolom behoort, nul te nemen.

§ 46. In het geval, dat $n = m + 1$ is, bevat de assemblant der coëfficienten $m + 1$ determinanten der hoogste orde. Deze stellen in onderlinge verhouding de waarden der $m + 1$ onbekenden voor. Zijn nu k dezer determinanten gelijk aan nul, dan kan aan het stelsel vergelijkingen alleen worden voldaan door voor de onbekenden, die betrekking hebben op bedoelde k determinanten nullen te nemen. De waarden der $m - k + 1$ overige onbekenden verhouden zich als de overige determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten. Deze determinanten zijn van de m^{de} orde

Door de k onbekenden, die gelijk aan nul zijn, uit de vergelijkingen weg te laten, gaat het stelsel vergelijkingen over in m lineaire vergelijkingen met $m - k + 1$ onbekenden. Aan dit stelsel vergelijkingen wordt alsnog vol-

daan door een stelsel wortels. Kiest men nu uit de aldus verkregen vergelijkingen er $m - k$ naar willekeur, dan worden de waarden der onbekenden voorgesteld door determinanten van de $m - k^{de}$ orde. Daar de graad van deze determinanten k eenheden lager is dan de graad der vroeger verkregen determinanten, zoo blijkt hieruit, dat de $m - k$ determinanten der hoogste orde, die niet nul zijn, deelbaar zijn door een factor van den k^{den} graad. Hierdoor verkrijgt men de eigenschap:

Bevat een assemblant, waarvan het aantal kolommen een meer is dan het aantal rijen, k determinanten der hoogste orde, die gelijk aan nul zijn, dan zijn de overige determinanten der hoogste orde, bevat in dezen assemblant, alle deelbaar door eenzelfden factor, die ten opzichte van de elementen van den assemblant van den k^{den} graad is.

Geval III^c: $m < n$,
alle determinanten der hoogste orde
bevat in den assemblant der coëfficienten
zijn gelijk aan nul.

§ 47. In het geval, dat alle determinanten bevat in den assemblant der coëfficienten gelijk aan nul zijn, bestaan er een of meer wortelstelsels voor de vergelijkingen (9). De vergelijkingen (8) zijn dus door een of meer lineaire betrekkingen verbonden.

Bestaat er slechts één lineaire betrekking tusschen de vergelijkingen (8), dan verkrijgt men door een dezer vergelijkingen, wier coëfficient in de bedoelde lineaire betrekking niet nul is, weg te laten een stelsel van $m - 1$ onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden. Hieraan wordt voldaan in het geheel door $n - m + 1$ onafhankelijk wortelstelsels.

Bestaan er tusschen de vergelijkingen (8) in het geheel k onafhankelijke lineaire betrekkingen, dan wordt aan de vergelijkingen (9) in het geheel voldaan door k onderling onafhankelijke wortelstelsels. Substitueert men deze k wortelstelsels voor de grootheden $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_m$ in de vergelijking:

$$p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_3 \theta_3 + \ldots + p_m \theta_m = 0 \quad \ldots\ldots \quad (25),$$

waarin $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots \theta_m$ de eerste leden der vergelijkingen (8) voorstellen, dan vertegenwoordigt deze vergelijking een

stelsel van k onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen tusschen de m grootheden $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_m$.

Hieruit kan men $k-1$ der grootheden θ elimineeren, waardoor men eene eindvergelijking verkrijgt tusschen de $m-k+1$ overige grootheden θ, welke uitdrukt, dat in dit geval tusschen elke $m-k+1$ vergelijkingen (8) eene lineaire betrekking bestaat.

Laat men nu nog één vergelijking weg, dan verkrijgt men een stelsel van $m-k$ onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, waaraan dus in het geheel voldaan kan worden door $n-m+k$ onafhankelijke wortelstelsels.

Tevens blijkt uit het vorige, dat, als in het geheel voldaan kan worden aan een stelsel van m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden door $n-m+k$ onafhankelijke wortelstelsels, deze vergelijkingen door k onafhankelijke lineaire betrekkingen verbonden moeten zijn.

Hieruit vloeien de volgende eigenschappen voort:

1. *Zijn m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $m < n$, in het geheel door k onafhankelijke lineaire betrekkingen verbonden, dan wordt aan deze vergelijkingen voldaan door $n-m+k$, maar niet door meer dan $n-m+k$ onafhankelijke wortelstelsels.*

2. *Als aan m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $m < n$, in het geheel voldaan kan worden door $n-m+k$ onafhankelijke wortelstelsels, dan zijn deze vergelijkingen door k onafhankelijke lineaire betrekkingen verbonden.*

3. *Zijn m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden in het geheel door k onafhankelijke lineaire betrekkingen verbonden, en wordt aan deze vergelijkingen in het geheel voldaan door k_1 onafhankelijke wortelstelsels, dan bestaat de betrekking:*

$$m-k=n-k_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

§ 48. De vergelijking (26) geeft, evenals de vergelijking (15), te kennen, dat het aantal onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden, verminderd met het aantal onafhankelijke wortelstelsels, die aan de vergelijkingen voldoen.

Stelt men zich nu het geval voor, dat m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden door m_1 lineaire betrekkingen verbonden zijn, welke weder door m_2, deze door

m_3 en deze laatste door m_4 lineaire betrekkingen verbonden zijn, zoodat de m_1 afhankelijke lineaire betrekkingen gelijkwaardig zijn met $m_1 - m_2 + m_3 - m_4$ onafhankelijke lineaire betrekkingen, en wordt in dit geval aan de vergelijkingen voldaan door n_1 wortelstelsels verbonden door n_2, deze door n_3 en de laatste weder door n_4 lineaire betrekkingen, zoodat deze n_1 afhankelijke wortelstelsels gelijkwaardig zijn met $n_1 - n_2 + n_3 - n_4$ onafhankelijke wortelstelsels, dan gaat de vergelijking (26), zonder van beteekenis te veranderen, over in:

$$m - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 = n - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 \quad . \quad . \quad (27).$$

§ 49. Vormt men in het geval, dat tusschen m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden in het geheel k onafhankelijke lineaire betrekkingen bestaan, een assemblant uit de coëfficienten dezer lineaire betrekkingen, alsmede een assemblant uit $n - m + k$ onafhankelijke wortelstelsels, die aan de vergelijkingen voldoen, dan kan men uit het voorgaande nog tot het bestaan der volgende eigenschappen besluiten:

1. *De assemblant gevormd uit de k stelsels coëfficienten der onafhankelijke lineaire betrekkingen, die tusschen m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden bestaan, is supplementair met den assemblant gevormd door $m - k$ naar willekeur genomen kolommen uit den assemblant der coëfficienten van deze vergelijkingen.*

2. *De assemblant gevormd door $n - m + k$ onafhankelijke wortelstelsels, die voldoen aan m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden, welke door k onafhankelijke lineaire betrekkingen verbonden zijn, is supplementair met den assemblant, gevormd door $m - k$ naar willekeur genomen rijen uit den assemblant der coëfficienten van deze vergelijkingen.*

3. *Als tusschen m lineaire homogene vergelijkingen met n onbekenden in het geheel k onafhankelijke lineaire betrekkingen bestaan, dan zijn alle determinanten van de $m - k + 1^{de}$ orde, bevat in den assemblant der coëfficienten van deze vergelijkingen, gelijk aan nul.*

§ 50. Hetgeen in de voorgaande paragrafen over de lineaire homogene vergelijkingen is medegedeeld, geldt ook voor de lineaire niet homogene vergelijkingen, mits men deze vooraf door het invoeren van een homogeniteitsfactor

in den homogenen vorm overbrengt. Daartoe vermenigvuldigt men alle vergelijkingen met eenzelfde onbepaalde grootheid en neemt deze, alsmede de producten van deze met de overige onbekenden tot nieuwe onbekenden aan.

Omgekeerd kan een stelsel lineaire homogene vergelijkingen worden teruggebracht tot een stelsel lineaire niethomogene vergelijkingen door alle vergelijkingen door een der onbekenden te deelen en tot nieuwe onbekenden aan te nemen de quotienten der overige onbekenden gedeeld door de eerste.

In het algemeen kan men bij een stelsel lineaire homogene vergelijkingen ieder der onbekenden als homogeniteitsfactor beschouwen. In één geval is dit echter niet geoorloofd, n.l. als alle determinanten der hoogste orde gelijk aan nul zijn, welke bevat zijn in den assemblant, dien men uit den assemblant der coëfficienten verkrijgt door één kolom weg te laten, terwijl de determinanten, die deze kolom bevatten van nul verschillen. In dit geval kan men niet deelen door de onbekende, die bij de weggelaten kolom behoort, daar deze de waarde nul moet hebben (§ 45).

Nam men deze onbekende tot homogeniteitsfactor aan, dan zou men een stelsel lineaire niet-homogene vergelijkingen verkrijgen, waaraan niet voldaan zou kunnen worden door eindige waarden der onbekenden. In dit geval zegt men, dat de vergelijkingen *met elkaar in strijd* of *strijdig* zijn.

Maakt men een stelsel strijdige vergelijkingen homogeen door invoering van een homogeniteitsfactor, dan verkrijgt men een stelsel lineaire homogene vergelijkingen, waaraan alleen voldaan kan worden door voor de ingevoerde onbekende de waarde nul te nemen.

§ 51. Bijzonder belangrijk is het geval $n = m + 1$. Men heeft dan een stelsel m lineaire homogene vergelijkingen met $m + 1$ onbekenden of een stelsel van m lineaire niethomogene vergelijkingen met m onbekenden.

De determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten kunnen in dit geval worden voorgesteld door $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_{m+1}$, waarbij de indices aanwijzen welke kolom uit den assemblant der coëfficienten moet worden weggelaten om den voorgestelden determinant te verkrijgen.

De waarden der onbekenden worden aangewezen door

de formule:

$$\frac{x_1}{A_1} = \frac{x_2}{-A_2} = \frac{x_3}{A_3} = \ldots\ldots = \frac{x_{m+1}}{(-1)^m A_{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

welke *de regel van Cramer* genoemd wordt.

Is een der determinanten van de hoogste orde bevat in den assemblant der coëfficienten, bijv. A_{m+1}, gelijk aan nul, terwijl de overige determinanten van nul verschillen, en heeft men in dit geval x_{m+1} tot homogeniteitsfactor aangenomen, dan zijn de niet-homogene vergelijkingen, die men daardoor heeft verkregen, met elkaar in strijd.

§ 52. In het geval, dat $m = n$ is, heeft men een stelsel van m lineaire homogene vergelijkingen met m onbekenden, of een stelsels van m lineaire niet-homogene vergelijkingen met $m - 1$ onbekenden. In dit geval is de assemblant der coëfficienten een determinant van de m^{de} orde, die de *resultant* van het stelsel vergelijkingen genoemd wordt.

Zal er voor zulk een stelsel vergelijkingen een stelsel wortels bestaan, dan wordt daarvoor vereischt, dat de resultant gelijk aan nul is (§ 31).

VRAAGSTUKKEN.

1. Als tusschen de supplementaire determinanten van twee verwante assemblanten eene constante verhouding bestaat, vormen de rijen van den eenen assemblant de onafhankelijke wortelstelsels der lineaire homogene vergelijkingen, wier coëfficienten gevormd worden door de rijen van den anderen assemblant.

Men vraagt dit te bewijzen.

2. Te bewijzen, dat alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \ldots\ldots & a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^n & a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \ldots\ldots & a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^n & a_3^{n-1} & a_3^{n-2} & \ldots\ldots & a_3^2 & a_3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^n & a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \ldots\ldots & a_n^2 & a_n & 1 \end{vmatrix},$$

waarin de bovenste indices machtsexponenten voorstellen deelbaar zijn door:

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \ldots\ldots & a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \ldots\ldots & a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^{n-1} & a_3^{n-2} & \ldots\ldots & a_3^2 & a_3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \ldots\ldots & a_n^2 & a_n & 1 \end{vmatrix},$$

en dat de achtereenvolgende quotienten der deeling zijn:

$$\begin{aligned} &1, \\ &a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n, \\ &a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} a_n, \\ &a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots\ldots + a_{n-2} a_{n-1} a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n. \end{aligned}$$

3. Te bewijzen, dat alle determinanten der hoogste orde, bevat in den assemblant:

$$\begin{vmatrix} a_1^{k+n} & a_1^{k+n-1} & a_1^{k+n-2} & \ldots\ldots & a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^{k+n} & a_2^{k+n-1} & a_2^{k+n-2} & \ldots\ldots & a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^{k+n} & a_3^{k+n-1} & a_3^{k+n-2} & \ldots\ldots & a_3^2 & a_3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{k+n} & a_n^{k+n-1} & a_n^{k+n-2} & \ldots\ldots & a_n^2 & a_n & 1 \end{vmatrix},$$

waarin de bovenste indices machtsexponenten voorstellen, deelbaar zijn door:

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} \ldots\ldots & a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} \ldots\ldots & a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^{n-1} & a_3^{n-2} \ldots\ldots & a_3^2 & a_3 & 1 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} \ldots\ldots & a_n^2 & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

en de quotienten der deelingen te bepalen.

4. Gevraagd voor het stelsel lineaire vergelijkingen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0,$$

al de wortelstelsels, die één nul onder de elementen bevatten, en al de eindvergelijkingen.

HOOFDSTUK III.

Determinanten bevat in een Assemblant.

§ 53. De leer der lineaire vergelijkingen, zooals die in het voorgaande hoofdstuk is uiteengezet, verschaft het middel de eigenschappen te leeren kennen der determinanten, die in een assemblant bevat zijn.

Bij de behandeling van dit onderwerp wordt weder uitgegaan van den assemblant:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \ldots\ldots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \ldots\ldots a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \ldots\ldots a_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_1^m & a_2^m & a_3^m \ldots\ldots a_n^m \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

bestaande uit m rijen van n elementen, waarbij $m < n$ wordt verondersteld. De lineaire homogene vergelijkingen, die uit de rijen en uit de kolommen van dezen assemblant gevormd kunnen worden, zullen nu bij verkorting de vergelijkingen δ en ξ genoemd worden.

Ter vereenvoudiging der notatie wordt in het volgende steeds $m = 4$ en $n = 7$ genomen. De assemblant (1) gaat dan over in (17), terwijl de vergelijkingen 6 worden voorgesteld door (16). De assemblant (19) stelt weder $n - m = 3$ onafhankelijke wortelstelsels dezer vergelijkingen voor.

Verder wordt de grootste gemeene deeler van de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (17) voorgesteld door R, en die van de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (19) door P. De eigenschap, dat deze assemblanten supplementair zijn, wordt dan uitgedrukt door de vergelijking:

$$\frac{R}{P} = \frac{A_{5,6,7}}{+X_{1,2,3,4}} = \frac{A_{4,6,7}}{-X_{1,2,3,5}} = \frac{A_{2,3,6}}{+X_{1,4,5,7}} = \text{enz.} \ldots\ldots (29).$$

§ 54. Deze vergelijking geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen:

1. P kan niet gelijk aan nul zijn, want, ware dit het geval, dan zouden alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (19) gelijk aan nul zijn; de door de rijen van dezen assemblant voorgestelde wortelstelsels der vergelijkingen 6 zouden dan, in strijd met de veronderstelling, door een of meer lineaire betrekkingen verbonden zijn.

2. Is $P = 1$, dan zijn de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (19) onderling ondeelbaar; de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (17) zijn dan deelbaar door hunne supplementaire determinanten uit den assemblant (19).

3. Dit is ook het geval als P een factor van R is, zonder gelijk aan 1 te zijn.

4. Is P geen factor van R, dan zijn de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (17) deelbaar door hunne supplementaire determinanten uit den assemblant (19), nadat deze gedeeld zijn door hun grootsten gemeenen deeler.

5. Is een der determinanten der hoogste orde uit den assemblant (19) gelijk aan nul, dan is zijn supplementaire determinant uit den assemblant (17) insgelijks gelijk aan nul.

6. Is een determinanten bevat in den assemblant (17) gelijk aan nul en is zijn supplementaire determinant uit

den assemblant (19) niet gelijk aan nul, dan is $R = 0$. In dit geval zijn alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (17) gelijk aan nul en zijn de vergelijkingen 6 afhankelijk van elkaar.

I. Deelbaarheid der determinanten bevat in een assemblant.

§ 55. De determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels der vergelijkingen 6 zijn niet altijd onderling ondeelbaar. Dit kan blijken uit het bestaan van wortelstelsels voor deze vergelijkingen, welke door lineaire betrekkingen verbonden zijn aan de onafhankelijke wortelstelsels, voorgesteld door de rijen van genoemden assemblant.

Laat bijv. aan de vergelijkingen (16), behalve door de drie onarhankelijke wortelstelsels voorgesteld door de rijen van den assemblant (19), nog voldaan worden door het wortelstelsel:

$$\left| x_1^4\, x_2^4\, x_3^4\, x_4^4\, x_5^4\, x_6^4\, x_7^4 \right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30),$$

dat door eene lineaire betrekking, wier coëfficienten bevat zijn in de rij:

$$\left| q_1\, q_2\, q_3\, q_4 \right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31),$$

verbonden is aan de wortelstelsels (19), waarbij q_1, q_2, q_3, q_4 onderling ondeelbaar zijn.

Vormt men uit de twee assemblanten (19) en (30) een enkelen assemblant en verwisselt daarna de rijen met de kolommen, dan verkrijgt men den assemblant:

$$\left| \begin{matrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ x_5^1 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \\ x_6^1 & x_6^2 & x_6^3 & x_6^4 \\ x_7^1 & x_7^2 & x_7^3 & x_7^4 \end{matrix} \right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32),$$

waarvan elke drie willekeurige rijen een assemblant vormen, die supplementair is met den assemblant (31).

Daar de grootheden q onderling ondeelbaar zijn, volgt hieruit, dat alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (19) in dit geval deelbaar zijn door q_4.

§ 56. Op dezelfde wijze kan men aantoonen, dat de determinanten bevat in den assemblant (19) een gemeenen deeler hebben in het geval, dat aan de vergelijkingen (16), behalve door de onafhankelijke wortelstelsels (19), nog voldaan wordt door de twee wortelstelsels voorgesteld door de rijen van den assemblant:

$$\begin{vmatrix} x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & x_6^4 & x_7^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 & x_6^5 & x_7^5 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33),$$

welke aan de wortelstelsels (19) verbonden zijn door twee lineaire betrekkingen, waarvan de coëfficienten bevat zijn in de rijen van den assemblant:

$$\begin{vmatrix} q_1^1 & q_2^1 & q_3^1 & q_4^1 & q_5^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 & q_5^2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

In dit geval zijn alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (19) deelbaar door

$\begin{vmatrix} q_4^1 & q_5^1 \\ q_4^2 & q_5^2 \end{vmatrix} : Q$, waarin Q den grootsten gemeenen deeler voorstelt der determinanten bevat in den assemblant (34).

§ 57. Samengestelder wordt het vinden van gemeene deelers voor de determinanten bevat in den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke worstelstelsels der vergelijkingen 6, als aan deze vergelijkingen voldaan wordt door meerdere wortelstelsels, die door lineaire betrekkingen van afhankelijkheid verbonden zijn, welke weder door lineaire betrekkingen verbonden zijn, welke bijzonderheid zich nog kan herhalen.

In dit geval hebben de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant (19) steeds een grootsten gemeenen deeler, die gewoonlijk niet gelijk aan 1 is.

Wordt bijv. aan de vergelijkingen (16) voldaan door de vijf wortelstelsels bevat in de rijen der assemblanten (19) en (33), welke door drie lineaire betrekkingen verbonden zijn, wier coëfficienten vermeld zijn in de rijen van den assemblant:

$$\begin{vmatrix} q_1^1 & q_2^1 & q_3^1 & q_4^1 & q_5^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 & q_5^2 \\ q_1^3 & q_2^3 & q_3^3 & q_4^3 & q_5^3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35),$$

terwijl de rijen van dezen assemblant weder verbonden zijn door eene lineaire betrekking, wier coëfficienten bevat zijn in de rij:

$$|r_1 \; r_2 \; r_3| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36),$$

waarbij r_1, r_2 en r_3 onderling ondeelbaar zijn.

In dit geval zijn de determinanten bevat in den assemblant (34) deelbaar door r_3.

Hebben de determinanten bevat in dezen assemblant geen anderen gemeenen deeler dan r_3, dan zijn alle determinanten bevat in den assemblant (19) deelbaar door

$$\begin{vmatrix} q_4^1 & q_5^1 \\ q_4^2 & q_5^2 \end{vmatrix} : r_3.$$

§ 58. Zijn de rijen van een assemblant niet door lineaire betrekkingen verbonden, dan zijn de determinanten der hoogste orde bevat in dezen assemblant deelbaar door de supplementaire determinanten uit den assemblant gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels der vergelijkingen 6, nadat deze determinanten gedeeld zijn door hun grootsten gemeenen deeler (§ 54, 4).

Zijn alle determinanten, die in een assemblant bevat zijn, gelijk aan nul, dan zijn de rijen van dezen assemblant door een of meer lineaire betrekkingen verbonden.

Bestaan er k onafhankelijke lineaire betrekkingen tusschen de rijen, dan vormen $m - k$ willekeurige kolommen van dezen assemblant een nieuwen assemblant, waarvan de determinanten der hoogste orde niet alle gelijk aan nul zijn. Evenzoo kan men in dit geval uit de rijen er $m - k$ kiezen, die een assemblant vormen, waarvan de determinanten der hoogste orde niet alle gelijk aan nul zijn.

De determinanten der hoogste orde bevat in den eersten assemblant zijn in dit geval deelbaar door eenzelfden factor. Dit is ook het geval met alle determinanten der hoogste orde bevat in den tweeden assemblant. Dit volgt onmiddellijk uit de stellingen van § 49 in verband met hetgeen in de voorgaande paragrafen over de deelbaarheid van determinanten is medegedeeld.

Voor iederen determinant van de $m - k^{de}$ orde bevat in den assemblant (1) zijn in dit geval twee deelers aan te wijzen.

Zulk een determinant behoort namelijk tot de determinanten bevat in $m - k$ kolommen en tevens tot de determinanten bevat in $m - k$ rijen van den assemblant (1). Hij moet dus deelbaar zijn door den supplementairen determinant uit den assemblant gevormd door de coëfficiënten der k lineaire betrekkingen, die tusschen de rijen van den assemblant (1) bestaan, nadat deze determinant gedeeld is door den grootsten gemeenen deeler van alle determinanten der hoogste orde bevat in dezen assemblant. Hij moet ook deelbaar zijn door den supplementairen determinant uit den assemblant gevormd door $n - m + k$ onafhankelijke wortelstelsels der vergelijkingen uit de rijen gevormd, nadat deze determinant gedeeld is door den grootsten gemeenen deeler van alle determinanten der hoogste orde bevat in dien assemblant.

2. Betrekkingen tusschen de determinanten bevat in een assemblant.

§ 59. De determinanten der hoogste orde bevat in een assemblant zijn door bepaalde betrekkingen verbonden.

Om deze betrekkingen te verkrijgen kan men in de eerste plaats gebruik maken van de $\binom{n}{m+1}$ wortelstelsels der vergelijkingen [6], welke $n - m - 1$ nullen als elementen bevatten. Uit deze wortelstelsels kieze men er $n - m$ uit, die onafhankelijk zijn. Ieder der andere wortelstelsels is dan door een lineaire betrekking verbonden aan de $n - m$ aangenomen onafhankelijke wortelstelsels. Door deze betrekkingen van afhankelijkheid, wier coëfficienten gemakkelijk zijn op te stellen, op bedoelde wortelstelsels toe te passen, verkrijgt men de vergelijkingen, die het verband uitdrukken tusschen de determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant.

Voor $m = 4$ en $n = 7$ worden de $\binom{n}{m+1} = 21$ wortelstelsels der vergelijkingen (16) welke ieder twee nullen bevatten, voorgesteld door de rijen van den assemblant:

$$
\begin{array}{c|cccccccc|}
1 & 0 & 0 & A_{1,2,3} & -A_{1,2,4} & A_{1,2,5} & -A_{1,2,6} & A_{1,2,7} \\
2 & 0 & -A_{1,2,3} & 0 & A_{1,3,4} & -A_{1,3,5} & A_{1,3,6} & -A_{1,3,7} \\
3 & A_{1,2,3} & 0 & 0 & -A_{2,3,4} & A_{2,3,5} & -A_{2,3,6} & A_{2,3,7} \\
4 & 0 & -A_{1,2,4} & A_{1,3,4} & 0 & -A_{1,4,5} & A_{1,4,6} & -A_{1,4,7} \\
5 & A_{1,2,4} & 0 & -A_{2,3,4} & 0 & A_{2,4,5} & -A_{2,4,6} & A_{2,4,7} \\
6 & -A_{1,3,4} & A_{2,3,4} & 0 & 0 & -A_{3,4,5} & A_{3,4,6} & -A_{3,4,7} \\
7 & 0 & A_{1,2,5} & -A_{1,3,5} & A_{1,4,5} & 0 & -A_{1,5,6} & A_{1,5,7} \\
8 & -A_{1,2,5} & 0 & A_{2,3,5} & -A_{2,4,5} & 0 & A_{2,5,6} & -A_{2,5,7} \\
9 & A_{1,3,5} & -A_{2,3,5} & 0 & A_{3,4,5} & 0 & -A_{3,5,6} & A_{3,5,7} \\
10 & -A_{1,4,5} & A_{2,4,5} & -A_{3,4,5} & 0 & 0 & A_{4,5,6} & -A_{4,5,7} \\
11 & 0 & A_{1,2,6} & -A_{1,3,6} & A_{1,4,6} & -A_{1,5,6} & 0 & A_{1,6,7} \\
12 & -A_{1,2,6} & 0 & A_{2,3,6} & -A_{2,4,6} & A_{2,5,6} & 0 & -A_{2,6,7} \\
13 & A_{1,3,6} & -A_{2,3,6} & 0 & A_{3,4,6} & -A_{3,5,6} & 0 & A_{3,6,7} \\
14 & -A_{1,4,6} & A_{2,4,6} & -A_{3,4,6} & 0 & A_{4,5,6} & 0 & -A_{4,6,7} \\
15 & A_{1,5,6} & -A_{2,5,6} & A_{3,5,6} & -A_{4,5,6} & 0 & 0 & A_{5,6,7} \\
16 & 0 & -A_{1,2,7} & A_{1,3,7} & -A_{1,4,7} & A_{1,5,7} & -A_{1,6,7} & 0 \\
17 & A_{1,2,7} & 0 & -A_{2,3,7} & A_{2,4,7} & -A_{2,5,7} & A_{2,6,7} & 0 \\
18 & -A_{1,3,7} & A_{2,3,7} & 0 & -A_{3,4,7} & A_{3,5,7} & -A_{3,6,7} & 0 \\
19 & A_{1,4,7} & -A_{2,4,7} & A_{3,4,7} & 0 & -A_{4,5,7} & A_{4,6,7} & 0 \\
20 & -A_{1,5,7} & A_{2,5,7} & -A_{3,5,7} & A_{4,5,7} & 0 & -A_{5,6,7} & 0 \\
21 & A_{1,6,7} & -A_{2,6,7} & A_{3,6,7} & -A_{4,6,7} & A_{5,6,7} & 0 & 0
\end{array}
\quad (37).
$$

Neemt men nu bijv. de vier eerste rijen en merkt men op, dat tusschen deze rijen de lineaire betrekking bestaat, wier coëfficienten bevat zijn in de rij:

$$\left| A_{1,3,4} \;\; A_{1,2,4} \;\; 0 \;\; -A_{1,2,3} \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38),$$

dan verkrijgt men hierdoor de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}
A_{1,3,4}\, A_{1,2,5} - A_{1,2,4}\, A_{1,3,5} + A_{1,2,3}\, A_{1,4,5} = 0, \\
-A_{1,3,4}\, A_{1,2,6} + A_{1,2,4}\, A_{1,3,6} - A_{1,2,3}\, A_{1,4,6} = 0, \\
A_{1,3,4}\, A_{1,2,7} - A_{1,2,4}\, A_{1,3,7} + A_{1,2,3}\, A_{1,4,7} = 0,
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (39).$$

Op dezelfde wijze kan men met de overige rijen van den assemblant (37) handelen. Tusschen de drie eerste rijen en de tiende rij bijv. bestaat de lineaire betrekking, wier coëfficienten bevat zijn in de rij:

$$\left| A_{3,4,5} \;\; A_{2,4,5} \;\; A_{1,4,5} \;\; A_{1,2,3} \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40).$$

Hierdoor verkrijgt men de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} -A_{3,4,5}\,A_{1,2,4}+A_{2,4,5}\,A_{1,3,4}-A_{1,4,5}\,A_{2,3,4} = 0, \\ A_{3,4,5}\,A_{1,2,5}-A_{2,4,5}\,A_{1,3,5}+A_{1,4,5}\,A_{2,3,5} = 0, \\ -A_{3,4,5}\,A_{1,2,6}+A_{2,4,5}\,A_{1,3,6}-A_{1,4,5}\,A_{2,3,6}+A_{1,2,3}\,A_{4,5,6} = 0, \\ A_{3,4,5}\,A_{1,2,7}-A_{2,4,5}\,A_{1,3,7}+A_{1,4,5}\,A_{2,3,7}-A_{1,2,3}\,A_{4,5,7} = 0, \end{array}\right\} \quad (41).$$

De betrekkingen, die tusschen de determinanten der hoogste orde van een assemblant bestaan, bevatten, als geen dezer determinanten gelijk aan nul is, minstens 3 en hoogstens $n - m + 1$ termen. De daarin voorkomende determinanten kunnen achtereenvolgens uit $m + 2$, $m + 3$,... $n - 1$, n kolommen van den assemblant gevormd worden.

§ 60. Eene andere methode om de vermelde betrekkingen te verkrijgen bestaat hierin, dat men uit de $\binom{n}{m-1}$ eindvergelijkingen, die men uit het stelsel vergelijkingen 6 kan afleiden, er m uitkiest, die onafhankelijk zijn. Iedere andere eindvergelijking is dan aan deze m onafhankelijke eindvergelijkingen door eene lineaire betrekking verbonden, wier coëfficienten gemakkelijk zijn op te stellen. Uit deze lineaire betrekkingen vloeien weder de verlangde vergelijkingen voort.

Bij toepassing op de vergelijkingen (16) verkrijgt men in het geheel $\binom{n}{m-1} = 35$ eindvergelijkingen, waarvan bijv. de volgende vier onafhankelijk zijn:

$$\left.\begin{array}{l} A_{2,3,4}x_1+A_{1,3,4}x_2+A_{1,2,4}x_3+A_{1,2,3}x_4 = 0, \\ A_{2,3,5}x_1+A_{1,3,5}x_2+A_{1,2,5}x_3 - A_{1,2,5}x_5 = 0, \\ A_{2,3,6}x_2+A_{1,3,6}x_2+A_{1,2,6}x_3 + A_{1,2,3}x_6 = 0, \\ A_{2,3,7}x_1+A_{1,3,7}x_2+A_{1,2,7}x_3 - A_{1,2,3}x_7 = 0, \end{array}\right\} \quad 42.$$

Neemt men hierbij de eindvergelijking:

$$A_{4,5,6}\,x_3 + A_{3,5,6}\,x_4 + A_{3,4,6}\,x_5 + A_{3,4,5}\,x_6 = 0 \;..\; (43),$$

dan blijkt, dat tusschen de vijf vergelijkingen (42) en (43) de lineaire betrekking bestaat wier coëfficienten bevat zijn in de rij:

$$\left|-A_{3,5,6}\;A_{3,4,6}\;-A_{3,4,5}\;0\;A_{1,2,3}\right| \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (44).$$

Hieruit vloeien de volgende vergelijkingen voort:

$$\left.\begin{array}{l} -A_{2,3,4}\,A_{3,5,6}+A_{2,3,5}\,A_{3,4,6}-A_{2,3,6}\,A_{3,4,5} = 0, \\ -A_{1,3,4}\,A_{3,5,6}+A_{1,3,5}\,A_{3,4,6}-A_{1,3,6}\,A_{3,4,5} = 0, \\ -A_{1,2,4}\,A_{3,5,6}+A_{1,2,5}\,A_{3,4,6}-A_{1,2,6}\,A_{3,4,5}+A_{1,2,3}\,A_{4,5,6} = 0, \end{array}\right\} \quad (45).$$

§ 61. Men kan de genoemde betrekkingen nog eenvoudiger verkrijgen door de wortelstelsels der vergelijkingen 6, welke $n - m - 1$ nullen bevatten, in de verschillende eindvergelijkingen te substitueeren. Men verkrijgt bijv. de derde vergelijking (45) door het eerste wortelstelsel (37) in de vergelijking (43) te substitueeren.

Eindelijk valt nog te vermelden, dat de bedoelde betrekkingen ook voortvloeien uit de eigenschap der supplementaire assemblanten. De assemblant (17) is bijv. supplementair met den assemblant gevormd door de drie eerste rijen van (37); hierdoor verkrijgt men:

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & -A_{1,2,4} & A_{1,2,5} \\ 0 & A_{1,3,4} & -A_{1,3,5} \\ A_{1,2,3} & -A_{2,3,4} & A_{2,3,5} \end{vmatrix}}{A_{1,4,5}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{1,2,3} \\ 0 & -A_{1,2,3} & 0 \\ A_{1,2,3} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{A_{1,2,3}} \quad . \quad . \quad (46),$$

of $A_{1,3,4}\,A_{1,2,5} - A_{1,2,4}\,A_{1,3,5} + A_{1,2,3}\,A_{1,4,5} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (47),$

zijnde juist de eerste vergelijking (39).

§ 62. De betrekkingen, die bestaan tusschen de determinanten der hoogste orde bevat in een assemblant, vereenvoudigen zich, ingeval een of meer dier determinanten gelijk aan nul zijn. In dit geval bestaan er ook betrekkingen, die slechts twee termen bevatten. Is bijv. $A_{1,2,3} = 0$, dan gaat de vergelijking (47) over in:

$$A_{1,3,4}\,A_{1,2,5} - A_{1,2,4}\,A_{1,3,5} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

§ 63. Er blijft nog over de vraag te beantwoorden, hoeveel en welke determinanten der hoogste orde, die in een assemblant bevat zijn, nul moeten zijn, opdat zulks het geval zij met alle determinanten der hoogste orde van dezen assemblant.

Daartoe kiest men uit de kolommen er $m - 1$, die niet door eene lineaire betrekking verbonden zijn. Deze $m - 1$ kolommen vormen met ieder der overige kolommen een determinant, waardoor men in het geheel $n - m + 1$ determinanten verkrijgt.

Zijn de aldus verkregen determinanten alle gelijk aan nul, dan is zulks het geval met alle determinanten der hoogste orde, die in den assemblant bevat zijn. In dit geval bestaat er namelijk een wortelstelsel voor al de

vergelijkingen ξ, die men uit de kolommen van den assemblant kan vormen.

3. Waarde van een Assemblant.

§ 64. Ten slotte valt nog te vermelden, welke beteekenis men kan geven aan de uitdrukking *waarde van een assemblant.*

Hieronder kan men verstaan de som der kwadraten van alle determinanten der hoogste orde, die in den assemblant bevat zijn, gedeeld door den grootsten gemeenen deeler van deze determinanten.

Als een bijzonder geval is in deze bepaling begrepen, wat men door waarde van een determinant verstaat.

Heeft een assemblant de waarde nul, dan zijn alle determinanten der hoogste orde, die in den assemblant bevat zijn, gelijk aan nul; de rijen zijn dan door een of meer lineaire betrekkingen verbonden.

Volgens § 21 kan de waarde van een assemblant worden voorgesteld door een symmetrischen determinant van de m^{de} orde, gedeeld door den grootsten gemeenen deeler van alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant. Deze waarde kan ook worden voorgesteld door een determinant van de n^{de} orde, dien men verkrijgt door aan de m rijen van den assemblant toe te voegen $n - m$ rijen, gevormd door $n - m$ onafhankelijke wortelstelsels der vergelijkingen θ, gedeeld door den grootsten gemeenen deeler van de determinanten der hoogste orde bevat in laatstgenoemden assemblant.

Voor de waarde van den assemblant (17) kan men nu schrijven:

$$\frac{A^2_{5,6,7} + A^2_{4,6,7} + A^2_{4,5,7} + \ldots + A^2_{1,2,3}}{R} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 & a^1_5 & a^1_6 & a^1_7 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 & a^2_5 & a^2_6 & a^2_7 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_4 & a^3_5 & a^3_6 & a^3_7 \\ a^4_1 & a^4_2 & a^4_3 & a^4_4 & a^4_5 & a^4_6 & a^4_7 \\ x^1_1 & x^1_2 & x^1_3 & x^1_4 & x^1_5 & x^1_6 & x^1_7 \\ x^2_1 & x^2_2 & x^2_3 & x^2_4 & x^2_5 & x^2_6 & x^2_7 \\ x^3_1 & x^3_2 & x^3_3 & x^3_4 & x^3_5 & x^3_6 & x^3_7 \end{vmatrix} : P \ldots\ldots\ldots \quad (49),$$

waarin P en R de bekende beteekenis hebben.

Deze formule vereenvoudigt zich, ingeval P of R, of beide, gelijk aan 1 zijn.

VRAAGSTUKKEN.

1. Te bewijzen, dat de determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & & b_2 & b_1 & \\ & a_1 & b_3 & & b_1 \\ a_2 & & & b_2 & \\ a_3 & a_2 & & b_3 & b_2 \\ & a_3 & & & b_3 \end{vmatrix}$$

, waarin de open vakken nullen voorstellen, deelbaar is door b_1, en dat

$$\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_2 & & b_2 & b_1 & \\ a_3 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 \\ & a_2 & & b_3 & b_2 \\ & a_3 & & & b_3 \end{vmatrix}$$

deelbaar is door b_2.

2. Te bewijzen, dat de determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_2 & & b_2 & b_1 & \\ a_3 & a_1 & b_3 & b_2 & \\ & a_2 & a_1 & b_3 & b_1 \\ & a_3 & a_2 & & b_2 \\ & & a_3 & & b_3 \end{vmatrix}$$

deelbaar is door $\begin{vmatrix} b_2 & a_3 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix}$.

3. Te bewijzen, dat alle determinanten der hoogste orde bevat in den assemblant:

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
a_1 & & & & b_1 & & & \\
a_2 & a_1 & & & b_2 & b_1 & & \\
a_3 & & a_1 & & b_3 & & & \\
a_4 & & & a_1 & b_4 & & & b_1 \\
 & a_2 & & & & b_2 & & \\
 & a_3 & a_2 & & & b_3 & & \\
 & a_4 & & a_2 & & b_4 & & b_2 \\
 & & a_3 & & & & & \\
 & & a_4 & a_3 & & & & b_3 \\
 & & & a_4 & & & & b_4
\end{array}\right| \text{ deelbaar zijn door } a_3.$$

4. Te bewijzen, dat tusschen de determinanten bevat in den assemblant

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$ de betrekking bestaat

$$A_{1,2}\,A_{3,4} - A_{1,3}\,A_{2,4} + A_{2,3}\,A_{1,4} = 0.$$

5. Te bewijzen

$$A_{1,2}^2 + A_{1,3}^2 + A_{1,4}^2 + A_{2,3}^2 + A_{2,4}^2 + A_{3,4}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 \end{vmatrix},$$

waarin de symbolen $A_{1,2}$, enz. de determinanten voorstellen bevat in den assemblant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$.

6. Te bewijzen

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & A_{1,2} & -A_{1,3} & A_{1,4} \\ -A_{1,2} & 0 & A_{2,3} & A_{2,4} \end{vmatrix} : A_{1,2} =$$

$$A_{1,2}^2 + A_{1,3}^2 + A_{1,4}^2 + A_{2,3}^2 + A_{2,4}^2 + A_{3,4}^2,$$

waarin de symbolen $A_{1,2}$, enz. dezelfde beteekenis hebben als in het voorgaande vraagstuk.

Over de samenstelling van krachten in de ruimte[1]

DOOR

GIULIO LAZZERI (Livorno).

Er bestaan, zooals bekend is, verschillende methoden om een willekeurig krachtenstelsel samen te stellen; onder deze zijn de meest bekende: die van de *drie punten*, die van de *stangenpyramide*, die van het *stangennet* en die van het *transversaal vlak en het centrum van reductie.*

Deze laatste bestaat hierin. Zij gegeven een stelsel van krachten f_i; zij verder O een willekeurig punt en π een willekeurig plat vlak. Indien A_i het snijpunt is van den vector f_i (of zijn verlengde) met het vlak π, en r_i de rechte, gaande door A_i, volgens welke het vlak $O f_i$ het vlak π snijdt, dan kan men f_i ontbinden in een component p_i volgens r_i, en een tweede q_i volgens OA_i. Alle krachten p_i in π gelegen kan men in 't algemeen tot een enkele kracht p en al de krachten gaande door O tot ééne kracht q samenstellen, en zoo is het stelsel herleid tot twee krachten.

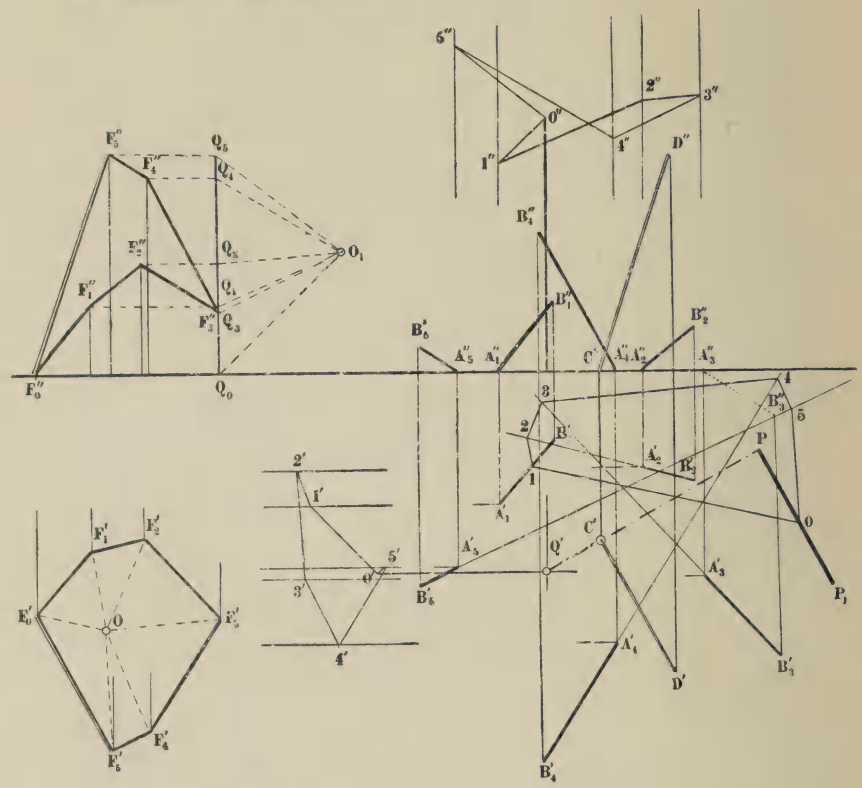
Een bijzondere ligging van O en π geeft aanleiding tot speciale constructies. Is bijv. π het vlak in het oneindige, dan komt de besproken methode neer op de overbrenging van alle gegeven krachten naar een punt O en de samenstelling van die naar O overgebrachte krachten en van alle koppels, die door die verplaatsing ontstaan zijn.

Het stelsel is aldus herleid tot ééne kracht, die aangrijpt

[1]) Op blz. 94 W. T. gaf de heer C. Krediet „De constructie van de centrale as van een krachtenstelsel". Toen dit reeds afgedrukt was, verscheen in de „Periodico di Matematica, Anno XXI, Fasc. III, Novembre-Dicembre 1905 een verhandeling van den heer Giulio Lazzeri (redacteur van dat tijdschrift) „Sulla composizione delle forze nello spazio" (blz. 97), waarin een andere constructie gegeven wordt.

Den heer L. werd voorgesteld in zijn tijdschrift een italiaansche vertaling op te nemen van het stuk van den heer K., waartegenover het W. T. een bewerking zou opnemen van de mededeeling van den heer L. De heer Dr. J. Stein (Katwijk a d Rijn) heeft welwillend de moeite op zich genomen het italiaansche stuk voor het W. T. te bewerken; bij de duidelijke en nauwkeurige overzetting heeft hij nog een noot gevoegd, die betrekking heeft op de figuur, ten behoeve van hen, die minder bekend zijn met Graphostatica. Red.

in O, en in grootte en richting wordt voorgesteld door een vector, die gelijk is aan de geometrische som der vectoren, die de samenstellende krachten voorstellen, en tot een koppel waarvan de as van moment gelijk is aan de geometrische som der assen van moment der componenten ten opzichte van O.



Alle bovengenoemde methoden ter samenstelling van krachten kan men met behulp van de beschrijvende meetkunde in toepassing brengen; maar zij zijn zeer bewerkelijk en omslachtig.

De behandelingswijze, waarbij men de methode van Monge het beste toepast, is die van het transversaal vlak en het reductiecentrum, wanneer men tot transversaal vlak kiest een der projectievlakken, en tot reductie-centrum het punt in het oneindige van de rechte loodrecht op dat vlak.

Daar deze constructie zelfs in de meest uitvoerige verhandelingen over graphostatica slechts terloops wordt vermeld, kwam 't mij niet geheel doelloos voor, die hier wat breedvoeriger uiteen te zetten, tegelijk met de bespreking waartoe ze aanleiding geeft.

1. Gegeven zijn n krachten f_i door middel van haar projecties op twee onderling loodrechte vlakken. We veronderstellen eerst, dat de vector, die gelijk is aan de geometrische som der krachtvectoren f_i, van nul verschilt, en dus dat ten minste een zijner projecties niet nul is. We mogen zelfs veronderstellen, dat beide projecties van nul verschillen, daar men altijd, zoo noodig, aan een der projectie-vlakken een anderen stand kan geven. In bijgaande figuur hebben wij verondersteld, dat de krachten vijf in getal zijn. $A'_i B'_i$, $A''_i B''_i$ zijn de projecties der resp. krachtvectoren; A'_i, A''_i de projecties der snijpunten met het horizontale vlak; afzonderlijk geteekend zijn de projecties $F_0' F_1' F_2' F_3' F'_4 F_5'$, $F_0'' F_1'' F_2'' F_3'' F_4'' F_5''$ van een veelhoek, welks zijden in grootte en richting aan de krachten gelijk zijn. Blijkbaar bepaalt de sluitzijde $F'_0 F'_5$, $F_0'' F_5''$ de hoofdrichting van 't stelsel (d.i. de richting der centrale as).

In 't voorbijgaan zij opgemerkt, dat 't voor de uitvoering der teekening noodig is, dat de gelijknaminge doorgangen allen in 't vlak van teekening gelegen zijn. In dien ze bij geval te ver uit elkaar liggen, dan kan men zoover noodig een der projectievlakken evenwijdig aan zichzelf verplaatsen.

Elke kracht f_i kan worden ontbonden in een kracht p_i gelegen in 't horizontale vlak, en een andere q_i loodrecht daarop. De kracht p_i wordt voorgesteld door $A'_i B'_i$ en q_i gaat door 't snijpunt A'_i. De veelhoek der krachten p_i is de veelhoek $F_0' F_1' F_2' \ldots$, die der q_i is $Q_0 Q_1 Q_2 \ldots$ waarbij $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ de projecties zijn der hoekpunten $F_0'', F_1'', F_2'' \ldots$ op een lijn die loodrecht staat op de as van projectie.

Nu bepale men met behulp van een stangenveelhoek $0\,1\,2 \ldots$ de resultante der krachten p_i, en met behulp van twee stangenveelhoeken $0'\,1'\,2' \ldots$, $0''\,1''\,2'' \ldots$ bepaalt men het aangrijpingspunt Q' van de resultante der krachten q_i, die het aangrijpen in de punten A'_i.

Aldus is het krachtenstelsel teruggebracht tot ééne kracht $p = F_0' F_5'$ in het horizontale vlak en een andere $q = Q_0 Q_5 = \Sigma q^i$ aangrijpend in Q' en loodrecht op de eerste

Is eenmaal het stelsel zoo getransformeerd, dan kan men zonder moeite de voornaamste vraagstukken oplossen, die daarop betrekking hebben.

2. *Vraagstuk.* De moment-as in grootte en richting te bepalen van het koppel, dat ontstaat wanneer men alle krachten van het stelsel naar eenzelfde punt overbrengt.

Trek door het gegeven punt C'[1]) een lijn evenwijdig aan de hoofdrichting en bepaal haar snijpunt met het horizontale vlak. Daar het moment van het koppel, dat men verkrijgt, als men een punt C tot reductie-centrum kiest, niet verandert, wanneer men C volgens de hoofdrichting verplaatst, kunnen wij het moment bepalen ten opzichte van genoemd snijpunt.

Zij dus D' dat snijpunt. Brengt men naar D' de kracht p over, dan zal men een moment-as hebben gelijk aan het product van p en den afstand van D' tot p, die men na keuze eener eenheid moet uitzetten loodrecht op het horizontale vlak. Brengt men q naar D' over, dan ontstaat een koppel, waarvan de moment-as gelijk is aan $D'Q' \times q$ en deze moet, herleid tot de aangenomen eenheid, worden uitgezet in het horizontale vlak loodrecht op D' Q'. Hierna biedt de samenstelling der twee moment-assen geen moeilijkheden meer.

3. *Vraagstuk.* De centrale as van het krachtenstelsel f_i te bepalen.

Zooals men weet is de centrale as de rechte lijn die de meetkundige plaats is der punten, waarvoor het moment van het stelsel minimum is, of wel van de punten, waarvoor de moment-as evenwijdig is aan de hoofdrichting zelve. Is het stelsel teruggebracht tot twee kruisende krachten, dan snijdt de centrale as de lijn van kortsten afstand loodrecht.

De gezochte centrale as moet dus gaan door een punt C' der rechte Q'P, die de kortste afstand is tusschen p en q. Dit punt C' kan gemakkelijk worden bepaald door de volgende beschouwing.

Stellen wij de afstanden van C' tot P en Q' gelijk aan x en y, en den afstand $PQ' = d$, zoodat $x + y = d$. De momenten van p en q ten opzichte van C' zijn resp. gelijk aan xp en yq. en de overeenkomstige moment-assen staan loodrecht op elkander, omdat de eerste loodrecht staat op

[1]) Overeenkomstig de figuur leze men in § 2 D' in plaats van C', en omgekeerd. (Vert.)

't horizontale vlak, terwijl de tweede erin ligt. Derhalve is het kwadraat van het moment M van het stelsel ten opzichte van C′ gelijk aan

$$M^2 = p^2x^2 + q^2y^2 = p^2x^2 + q^2(d - x)^2$$

of

$$M^2 = (p^2 + q^2)x^2 - 2q^2dx + q^2d^2.$$

Bijgevolg $\frac{d(M^2)}{dx} = 2\{(p^2 + q^2)x - q^2d\}$,

$$\frac{d^2(M^2)}{dx^2} = 2(p^2 + q^2).$$

Voor $x = \frac{q^2}{p^2 + q^2}d$, heeft men $\frac{d(M^2)}{dx} = 0$, $\frac{d^2(M^2)}{dx^2} > 0$,

en is dus M^2 een minimum. Derhalve wordt het punt C′, waardoor de centrale as gaan moet, bepaald door de voorwaarden:

$$x = \frac{q^2}{p^2 + q^2}d, \quad y = \frac{p^2}{p^2 + q^2}d,$$

zoodat

$$\frac{x}{y} = \frac{q^2}{p^2}.$$

De centrale as verdeelt dus PQ′ in stukken, die omgekeerd evenredig zijn met de kwadraten der krachten p, q.

Men komt ook zonder berekening tot hetzelfde resultaat door deze eenvoudige beschouwing. Brengt men de krachten p en q over naar een punt C′ van PQ′ dan zijn de ontstane moment-assen gelijk aan xp, yq, en resp. evenwijdig aan q, p. Opdat de resultante der beide krachten p, q evenwijdig zij aan de resulteerende moment-as van yq en xp is 't dus noodig en voldoende dat:

$$\frac{yq}{xp} = \frac{p}{q}, \qquad \text{of } \frac{x}{y} = \frac{q^2}{p^2}.$$

Men behoeft dus slechts een rechthoekigen driehoek te construeeren met rechthoekszijden p en q. De projecties van deze rechthoekszijden op de hypotenusa zijn evenredig met de vierkanten van p en q, en bijgevolg, indien wij $Q'P = d$ in stukken verdeelen evenredig aan genoemde projecties, verkrijgen wij de stukken x, y en 't punt C′.

4. *Vraagstuk*. Het moment te bepalen van een krachtenstelsel ten opzichte van een willekeurige rechte.

Heeft men, als in § 1, het stelsel herleid tot twee krachten p, q, de eene gelegen in het horizontale vlak de andere

loodrecht daarop, dan is het moment van het stelsel ten opzichte van een rechte r gelijk aan de som der momenten van p en q ten opzichte van r.

Zij $M'M''$ de horizontale doorgang van r, en nemen wij op r een stuk MN gelijk aan de eenheid. Het moment van p ten opzichte van r is gelijk aan zesmaal het volumen van 't viervlak, dat MN en p tot overstaande ribben heeft. Het grondvlak van dat viervlak is gelijk aan $\frac{1}{2}pd$, waarin d de afstand van M' tot de lijn p voorstelt; de hoogte is N_0N'', dus het moment van p ten opzichte van r is

$$p.\,d.\ N_0\,N''$$

d.w.z. gelijk aan het moment van het stelsel der krachten p_i ten opzichte van den horizontalen doorgang der lijn r, vermenigvuldigd met de projectie der lengte-eenheid, genomen langs r, op een verticale lijn.

Het moment der krachten q ten opzichte van r is zesmaal het volumen van het viervlak, dat tot overstaande ribben heeft q en $MN = 1$ (langs r), en dat viervlak is equivalent met een ander, dat tot overstaande ribben heeft $M'N'$ en q. Indien h voorstelt den afstand van Q' tot de horizontale projectie $M'N'$ van r, dan wordt het grondvlak $Q'M'N'$ van dat viervlak voorgesteld door $\frac{1}{2}h.\,M'N'$, terwijl de hoogte $= q$ is; dus het moment van q ten opzichte van r is

$$M'\,N'\,h.\,q$$

d.w.z. het is gelijk aan het moment van het stelsel evenwijdige krachten q_i, die aangrijpen in de punten A'_i ten opzichte van de horizontale projectie van r, vermenigvuldigd met de horizontale projectie van de lengte-eenheid genomen langs de lijn r.

Uit de beide momenten van p en q vindt men het moment van het stelsel door hun algebraïsche som te nemen.

5. In de vorige §§ hebben wij verondersteld, dat de meetkundige som der krachten f_i, alsmede hare projecties op de twee vlakken van nul verschilde.

Indien de geometrische som der krachten f_i van nul verschilt, kan 't gebeuren dat één van haar beide projecties nul is, in welk geval de andere projectie gelijk is aan de geometrische som der krachten zelve. M.a.w. 't kan voorkomen, dat een der beide gebroken lijnen $F'_0F'_1 \ldots F'_n$, $F''_0F_1'' \ldots F''_n$ gesloten is.

1°. Veronderstellen wij, dat de gebroken lijn $F_0F'_1 \ldots F'_n$

gesloten is, en $F''_0F_1'' \ldots . F''_n$ niet. Handelend als in § 1 vinden wij als resultante der krachten p_i een koppel met een moment-as loodrecht op het horizontale vlak, en als resultante van de q_i's een kracht loodrecht daarop. Hieruit volgt, dat de rechte lijn waarlangs deze resultante aangrijpt, de centrale as van het stelsel is.

2^0. Veronderstellen wij, dat $F''_0F''_1 \ldots . F''_n$ gesloten is, en $F'_0F'_1 \ldots . F'_n$ niet. In dat geval kan men als in § 1 de krachten p_i tot een enkele p samenstellen met behulp van een stangenveelhoek; en daar $\Sigma q^i = 0$, kan men deze krachten herleiden tot een koppel gelegen in een vlak loodrecht op 't horizontale projectievlak, waarvan men den horizontalen doorgang op de volgende wijze kan bepalen.

Zondert men uit de q_i's een willekeurige q_n af, dan zullen de overige krachten een resultante hebben gelijk en tegengesteld aan q_n, aangrijpend in 't zwaartepunt K der $n-1$ punten $A'_1, A'_2 \ldots . A'_{n-1}$, ieder voorzien van een coëfficient evenredig aan $q_1, q_2 \ldots . q_{n-1}$. De doorgang van het vlak, dat het resulteerende koppel van $q_1, q_2 \ldots . q_n$ bevat, is dus KA'_n, en de moment-as ligt in het horizontale vlak loodrecht op KA'_n. Bij de constructie dezer as, kieze men als eenheid van moment eene grootheid $p = F'_0 F'_n$.

Is aldus het stelsel teruggebracht tot een kracht p in het horizontale vlak en tot een koppel, waarvan de moment-as in hetzelfde vlak gelegen is, dan kunnen wij die moment-as ontbinden in twee andere, de een evenwijdig aan p, en de andere loodrecht daarop. Die laatste kan men met p samenstellen door p evenwijdig aan zich zelf te verplaatsen in een richting loodrecht op 't horizontale vlak, over een afstand gelijk aan die moment-as (omdat p tot eenheid van moment is gekozen).

Zoo vinden wij de centrale as, die tot horizontale projectie heeft p, en tot verticale een lijn evenwijdig aan de as van projectie op een afstand daarvan, die gelijk is aan bovengenoemde moment-as.

6. Indien beide gebroken lijnen $F'_0F'_1 \ldots F'_n$, $F''_0F''_1 \ldots F''_n$ gesloten zijn en dus ook de veelhoek der krachten f_i zelf gesloten is, kan men de krachten p_i herleiden tot een koppel gelegen in het horizontale vlak, en dus met een moment-as loodrecht daarop, terwijl ook de q^i's worden herleid tot een koppel gelegen in een vlak loodrecht op het horizontale projectievlak, welks doorgang men bepaalt als in de vorige §.

De samenstelling van die twee koppels levert geen bezwaar.

Noot van Dr. J. STEIN bij de figuur.

In de teekening is een onjuistheid ingeslopen, daar $F'_1 F'_2$ gelijk en evenwijdig aan $A'_2B'_2$ moet zijn.

Ter verklaring der stangenveelhoeken diene nog het volgende.

Neem een willekeurig punt O en verbind dit met de hoekpunten van den krachtenveelhoek $F'_0 F'_1 \ldots . F'_n$. Trek uit een willekeurig punt 1 van de lijn $A'_1 B'_1$ een lijn evenwijdig aan OF'_1; uit het punt 2 waar deze lijn den vector $A'_2B'_2$ (of zijn verlengde) snijdt, trekke men de lijn 2—3, evenwijdig aan OF'_2 enz. Eindelijk trekke men nog uit de punten 1 en 5 lijnen resp. evenwijdig aan OF'_0 en OF'_5. Het ontmoetingspunt dezer twee laatste is dan een punt der lijn, volgens welke de resultante PP_1 der krachten $A'_1 B_1', \ldots . A'_5B'_5$ aangrijpt. Immers uit de beschouwing van den veelhoek $F'_0 F'_1 \ldots . F'_5$ blijkt, dat men ieder der krachten $A'_1 B'_1, \ldots . A'_5 B'_5$ te zamen met de tegengestelde der resultante $P_1 P$ kan ontbinden in twee componenten volgens de stangen 1 2, 2 3, ... 5 0, 0 1, zoodanig dat langs elke stang twee gelijke en tegengestelde krachten werken. De stangenveelhoek 0 1 2 3 . . . . 5 is dus in evenwicht.

Om het aangrijpingspunt van de resultante der vertikale krachten q_i te vinden, kieze men weer een punt O_1, dat men verbindt met $Q_0, Q_1 \ldots \ldots Q_5$. Door de punten $A'_1, A'_2 \ldots A'_5$ trekke men lijnen resp. loodrecht op en evenwijdig aan de as van projectie. Men vindt dan, door achtereenvolgens $1'' 2'', 2'' 3'', \ldots .$ te construeeren evenwijdig aan $OQ_1, OQ_2 \ldots$, een punt O'' van de projectie der resultante op 't vertikale vlak; en trekt men $1' 2', 2' 3', 3' 4' \ldots$ loodrecht op $O_1 Q_1, O_1 Q_2, O_1 Q_3 \ldots .$, dan vindt men een punt O' der projectie van de resultante op het derde projectievlak. Het snijpunt Q' van twee lijnen door O' en O'' getrokken resp. evenwijdig aan en loodrecht op de as van projectie, is dan het aangrijpingspunt der evenwijdige krachten q_i zelve.

Eigenschappen van een driehoek

DOOR

J. TUMMERS (Nijmegen).

De driehoek, dien wij bedoelen, bevat twee hoeken, waarvan de een door α, een tweede door 2α kan worden voorgesteld, terwijl de derde willekeurig is.

1e Eigenschap (Zie fig. I).

De zijde tegenover $\angle 2\alpha$ is middelevenredig tusschen de zijde tegenover $\angle \alpha$ en de som der zijden tegenover $\angle \alpha$ en den 3en hoek. Zie Molenbroek, 1e druk, vraagstuk 666.

Zij ABC de driehoek. Te bewijzen $BC^2 = AC\,(AC + AB)$.

Bewijs. Beschrijf om $\triangle ABC$ een cirkel, en zij D het snijpunt van den raaktijn in C en het verlengde van AB, dan is $\angle DCA = \alpha$ en $\angle CDA = \angle CAB - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha$, dus $DA = CA$; bovendien is $DC = CB$, ook is $DC^2 = AD\,(AD + AB)$, of $BC^2 = AC\,(AC + AB)$.

Fig. I.

Fig. II.

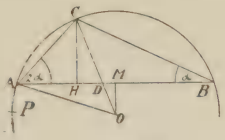


Fig. III.

Gevolg. Was $\angle C$ ook $= 2\alpha$, dan waren de hoeken 72°, 72° en 36°, en dus $BC^2 = AB^2 = AC\,(AC + AB)$ of $AC^2 = AB^2 - AC.\,AC = AB\,(AB - AC)$, dan was dus AC het grootste stuk van de in de uiterste en middelste reden verdeelde lijn AB. Deze eigenschap heeft men noodig voor de zijde van den regelmatigen tienhoek.

2e eigenschap.

De zijde tegenover $\angle \alpha$ is gelijk aan het verschil der projectieën der zijde tegenover 2α en der zijde tegenover α.

Zij $\triangle ABC$ de $\triangle$ (zie fig. I).

Trek $CF = CA$ en $CH \perp AB$. We hebben $AC = CF = FB$, $FB = HB - HF = HB - AH$, dus ook $AC = HB - AH$.

3e eigenschap.

Is $\triangle$ ABC in een cirkel beschreven, dan zal de straal OC een stuk AD afsnijden, dat gelijk is aan AC.

Bewijs. (zie fig. II.) $\angle B = \alpha$, dus $\angle AOC = 2\alpha$; derhalve is $\angle AOC = \angle CAD$, bovendien is $\angle ACD = \angle ACO$, dus $\triangle ACD \infty \triangle AOC$, dus $\triangle ACD$ is ook gelijkbeenig dus is $AC = AD$.

Ook deze eigenschappen leeren ons, dat de trisectie tot een derde-machtsvergelijking leidt, gelijk aldus blijken kan. (zie fig. III.)

Om $\triangle$ ABC is een cirkel beschreven. CH en MO zijn loodlijnen, dus $AM = MB$. Gelijk we zagen is $\triangle ADC \infty \triangle AOC$, dus $AC^2 = CD \times CO$; ook is $AC = BH - AH = MB + HM - (AM - HM) = MB + 2\,HM - AM = 2\,HM$.

$\triangle HCD \infty \triangle ODM$, dus $\frac{HD}{DM} = \frac{CD}{DO}$ of $\frac{HD + DM}{CD + DO} = \frac{HD}{CD}$ of $\frac{HM}{r} = \frac{HD}{CD}$; daar $HM = \frac{1}{2} AC$, hebben we $\frac{\frac{1}{2} AC}{r} = \frac{HD}{CD}$ of $\frac{AC}{2r} = \frac{HD}{CD}$.

Zij $AC = b$ en $AB = c$; $HD = AD - AH = AD - (AM - HM) = AD + HM - AM = AC + \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} c = 1\frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} c = 1\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c$.

De evenredigheid $\frac{AC}{2r} = \frac{HD}{CD}$ gaat over in $\frac{b}{2r} = \frac{1\frac{1}{2} b - c}{CD}$ of $CD = \frac{2r\,(1\frac{1}{2} b - c)}{b} = A$.

In eigenschap III vonden we $AC^2 = CO \times CD$ of $CD = \frac{b^2}{r} = B$.

A en B combineerende krijgen we $\frac{b^2}{r} = \frac{2r\,(1\frac{1}{2} b - c)}{b}$ of $b^3 = 2\,r^2\,(1\frac{1}{2} b - c)$, of ook $b^3 - 3\,r^2\,b - 2\,r^2\,c = 0$, waarin b de eenige onbekende is Kenden we b, dan zouden we een hoek in het segment APB in 3 gelijke deelen kunnen verdeelen, door P te verbinden met C.

Oude Rekenopgaven

DOOR

J. N. VISSCHERS

('s-Hertogenbosch).

I.

Bij Mamre's eijkenbosch was Abraham gezeten,
Wanneer de Godheijt kwam, en aan haar vriendt deed weeten,
Dat zijne egtgenoot hem baren zal een zoon,
Omtrent deez' tijdt van 't jaar; vrouw Sara ongewoon
In haren zuijv'ren egt een Levendt zaad te teelen
Nu in den ouden dag een lieven zoon te streelen,
Nu wellust hebben, nu, nu zij en haaren Heer
Door outheijt zijn verzwakt; keert dan de jeugt oijt weer.
Zal een verstorven schoot dan wederom herleeven!
Zal dan 't verdorde veldt des winters bloemen geeven!
Dit dacht vrouw Sara niet, maar lachte om dit woordt:
Geen wonder, zulk een zaak was vreemd en ongehoordt,
't Getal der schaakels aan de keten van haar jaaren,
Was van die veelheijt, dat, zoo die vermenigt waren
Met die van Abraham, dat dan haar ouderdom
Tot den verheven trap van negen duizend klom.
En tienmaal had de boer alreede in Abrams dagen
Het rijp en goutgeel graan in zijnen schuur gedraagen,
Eer Sara 't levensligt van 's Hemels hand ontving.
Dog bij Hem, die 't beloofde, is niets te zonderling.
Zeg mij nu rekenaars, zeg mij hoe hoog de jaaren
Van Godsvrient Abraham en van zijn Sara waren.

(Verg. examen te Lutjebroek in 1760).

II.

Trijntje. Stijntje en Mijntje,
Die slachten te zâam een zwijntje.
Trijntje spreekt tot deze vrouwen:
„In 12 weken kan ik alles kauwen."

Stijntje spreekt, tot haar fatsoen:
„Ik heb 4 weken meer van doen.
Dan kan ik het, tot mijn smaak,
Opeten tot den laatsten kaak."
„Neen, zacht!" sprak toen vrouw Mijntje,
„Laat voor ditmaal mij het zwijntje;
In 20 week zal ik het varken,
Opeten tot mijn lijfverstarken."
Nu vraag ik, als zij te zâam beginnen,
Hoe gauw zij 't varken dan verslinnen.

(Verg. examen voor hoofdonderwijzer 1822 te O. Friesland).

III.

Een visscher had een visch in 't ruim,
Waarvan de staart was negen duim.
De staart en halve kop zijn even
Gelijk de kop is opgegeven.
De heele rug, daar doelt dit op,
Die was gelijk aan staart en kop.
Vraag niet waar die gevangen is,
Maar naar de lengte van de visch.

(Verg. examen voor hoofdonderwijzer 1822 te O. Friesland.)

IV.

Een dronkaard drinkt één tonne kleine (kluinbier) alleen uit in 10 dagen tijds, en als zijn wijf met hem drinkt, zoo drinken zij de ton uit in 6 dagen. Vrage in hoeveel tijds dat zijn wijf de tonne kluyn alleen uitdrinken zouw. facit in 15 dagen.

(Aritmetrica ofte Rekenkonst van Marten Wilkens 1669)

V.

Een overleden man agterlatende eene bevruchte vrouw met / 3175 / heeft zijn testament gemaakt, dat so God haar moeder liet worden van een zoon / dien zoude driemaal so veel hebben als de Moeder / maar zoo het eene

dochter waare / die zoude maar $^1/_2$ zoo veel hebben als de moeder; de barenstijd aankomende zo ontfangt zij een zoon / een Dochter en een Hermaphroditas (halve man half vrouw). Vrage hoeveel zal elk dan hebben opdat des vrous verbond onverbroken blijft? kuring facit de Moeder *f* 508, de Zoon *f* 1524, de Dochter *f* 254 en de Hermaphroditas *f* 889.

(Aritmetrica ofte Rekenkonst van Marten Wilkens 1669).

In verband met het bovenstaande worde hier nog een vraagstuk in vers-vorm bijgevoegd, waarvan de oplossing minder voor de hand ligt:

Drie Swaagers mij bezoeken kwamen,
Elk met zijn Vrouw, voorleeden Jaar;
Als Willem, Klaas en Jaap te saamen,
Katrijn, Marije ende Klaar;
En zeid' mij, dat zij met malkander,
Wat verkens hadde in stêe gekocht,
Zoowel den eenen als den ander,
En hebben die toen thuis gebrocht.
Ook moesten iedereen betalen
Net zooveel guldens voor een Swijn,
Als hij gekocht of thuis kwam haalen,
En Willem had er meer dan Trijn,
Juist drie en twintig van die Swijne,
En Klaas, die kocht er ellef bet
Als Marij; ieder man voor 't Sijne,
Gaf twintig ducatonne [1]) net
Meer voor de sijne dan van zijn Vrouwe,
Nu Reekenaars, ei, zeg mij dan,
Hoe hiete ieder man zijn Vrouwe,
Hoe hiete ieder Vrouw haar man.

In vroegere tijdschriften komen meer vraagstukken voor van dezen aard, al of niet in versvorm, die door kunstgrepen moeten worden opgelost (men had blijkbaar meer tijd dan nu). Kunnen andere leeraren niet titels opgeven van zulke tijdschriften? F. J. Vaes.

---

[1]) Drie en zestig gulden.

Deelbaarheid van $a^p - a$ door p[1],

DOOR

H. G. A. VERKAART

(Haaksbergen).

Dat voor elk ondeelbaar getal p, $a^p - a$ deelbaar is door p, kan voor elk geval ook aangetoond worden door te bewijzen, dat $a^p - a$ een p-voud verschilt met het een of ander product van p opeenvolgende factoren.

Bij $p = 2$ of 3 heeft men direct zoo'n product door te ontbinden:

$$a^2 - a = (a - 1)\,a,$$
$$a^3 - a = (a - 1)\,a\,(a + 1).$$

Bij de andere is het de kortste weg $a^p - a$ te vergelijken met een product van p opeenvolgende getallen, waarvan a het middelste is. Tevens verdient het dan aanbeveling bij de ontbinding van $a^p - a$ voor zoover noodig slechts even machten van a te gebruiken, daar immers de factoren van het product, dat met $a^p - a$ vergeleken wordt, ook behalve a zeer eenvoudig 2 aan 2 samengenomen kunnen. Hier volgen de bewijzen voor eenige gevallen.

I). $a^5 - a = (a - 1)\,a\,(a + 1)\,(a^2 + 1)$.

$(a - 2)\,(a + 2) = a^2 - 4$. De laatste factor moet dus met 5 verminderd worden.

II). $a^7 - a = (a - 1)\,a\,(a + 1)\,(a^4 + a^2 + 1)$.

$(a - 2)\,(a + 2)\,(a - 3)\,(a + 3) = (a^2 - 4)\,(a^2 - 9 = a^4 - 13\,a^2 + 36$. Het verschil met den laatsten factor is een 7-voud.

III). $a^{11} - a = (a - 1)\,a\,(a + 1)\,(a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1)$.

$(a^2 - 4)\,(a^2 - 9)\,(a^2 - 16)\,(a^2 - 25)$ verschilt een 11-voud met $(a^2 - 4)\,(a^2 + 2)\,(a^2 - 5)\,(a^2 - 3)$, of $(a^4 - 2\,a^2 - 8)\,(a^4 - 8\,a^2 + 4)$, of $a^8 - 10\,a^6 + 12\,a^4 + 56\,a^2 - 32$.

---

[1]) Naar aanleiding van afl. III, 1en jaargang, bl. 176.

Deze vorm verschilt een 11-voud met den laatsten factor van $a^{11} - a$.

IV. $a^{13} - a = (a-1)\,a\,(a+1)(a^2+1)\,(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)$.

De laatste 3 factoren moeten vergeleken worden met het product $(a^2 - 4)\,(a^2 - 9)\,(a^2 - 16)\,(a^2 - 25)\,(a^2 - 36)$. Dadelijk valt in 't oog: $(a^2 - 25) + 26 = a^2 + 1$.

Verder heeft men:

$$(a^2 - 4)\,(a^2 - 36) + 13\text{-voud} = (a^2 - 4)\,(a^2 + 3) = (a^4 - a^2 + 1) - 13,$$

$$(a^2 - 9)\,(a^2 - 16) + 13\text{-voud} = (a^2 + 4)\,(a^2 - 3) = (a^4 + a^2 + 1) - 13.$$

Voor de twee laatste factoren hadden we kunnen zetten $a^8 + a^4 + 1$. We gaan dan verder als volgt te werk:

$$(a^2 - 4)\,(a^2 - 9) = (a^2 - 4)\,(a^2 + 4) - 13\text{-voud} = (a^4 - 3) - 13\text{-voud},$$

$$(a^2 - 16)\,(a^2 - 36) = (a^2 - 3)\,(a^2 + 3) - 13\text{-voud} = (a^4 + 4) - 13\text{-voud},$$

$$(a^4 - 3)\,(a^4 + 4) = (a^8 + a^4 + 1) - 13.$$

V. $a^{17} - a = (a-1)\,a\,(a+1)\,(a^2+1)\,(a^4+1)\,(a^8+1)$.

$$a^2 - 16 = (a^2 + 1) - 17,$$

$$(a^2 - 4)\,(a^2 - 64) = (a^2 - 4)\,(a^2 + 4) - 17\text{-voud} = (a^4 + 1) - 17\text{-voud},$$

$$(a^2 - 9)\,(a^2 - 25)\,(a^2 - 36)\,(a^2 - 49) = (a^2 + 8)\,(a^2 - 8)\,(a^2 - 2)\,(a^2 + 2) - 17\text{-voud} = (a^4 - 64)\,(a^4 - 4) - 17\text{-voud} = (a^4 + 4)\,(a^4 - 4) - 17\text{-voud} = (a^8 + 1) - 17\text{-voud}.$$

VI). $a^{19} - a = (a-1)\,a\,(a+1)\,(a^4 + a^2 + 1)\,(a^{12} + a^6 + 1)$.

We moeten de beide laatste factoren vergelijken met $(a^2 - 4)\,(a^2 - 9)\,(a^2 - 16)\,(a^2 - 25)\,(a^2 - 36)\,(a^2 - 49)\,(a^2 - 64)\,(a^2 - 81)$. Dit product verschilt een 19-voud met

$$(a^2 - 4)\,(a^2 - 9)\,(a^2 + 3)\,(a^2 - 6)\,(a^2 + 2)\,(a^2 + 8)\,(a^2 - 7)\,(a^2 - 5).$$

Om $a^4 + a^2 + 1$ zoeken we twee factoren uit, waarin de bekende getallen samen $+1$ (de coëfficiënt van a^2) zijn. Dit zijn alleen $a^2 + 8$ en $a^2 - 7$.

$$(a^2 + 8)\,(a^2 - 7) = a^4 + a^2 - 56 = (a^4 + a^2 + 1) - 57.$$

Verder nemen we samen $(a^2 + 2)(a^2 + 3)(a^2 - 5)$ en $(a^2 - 4)(a^2 - 9)(a^2 - 6)$, omdat $+ 2 + 3 - 5 = 0$ en $- 4 - 9 - 6 = - 19$.

$$(a^2 + 2)(a^2 + 3)(a^2 - 5) = (a^4 + 5\,a^2 + 6)(a^2 - 5) =$$
$$a^6 - 19\,a^2 - 30 = a^6 + 8 - 19\text{-voud.}$$
$$(a^2 - 4)(a^2 - 9)(a^2 - 6) = (a^4 - 13\,a^2 + 36)(a^2 - 6) =$$
$$(a^4 + 6\,a^2 - 2)(a^2 - 6) - 19\text{-voud} =$$
$$a^6 - 38\,a^2 + 12 - 19\text{-voud} = a^6 - 7 - 19\text{-voud.}$$

Ten slotte:

$(a^6 + 8)(a^6 - 7 = a^{12} + a^6 - 56$. De vorm verschilt een 19-voud met $a^{12} + a^6 + 1$.

Varia over π

DOOR

D^R^. N. QUINT (den Haag).

(Vervolg van bl. 170.)

Beter gaat dit bij het volgende, dat 21 decimalen geeft:

„Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Glorieux Archimède, artiste ingénieux,
Toi de qui Syracuse aime encore la mémoire!"

Het gedicht stelt dus een ontboezeming van een of anderen Bartjens voor, die bijzonder ingenomen is met zijn schoone levenstaak, en zeker om bij zijn leerlingen in het gevlei te komen hen tot „sages" bevordert! Vergeven moet hem dan maar worden, dat het laatste woord een letter te veel heeft en dat de geschiedenis in het aangezicht geslagen wordt door de bewering, dat Syracuse de nagedachtenis van haren grooten burger zoo bijzonder eert. Men weet het, 150 jaar na den dood van Archimedes kon Cicero niet dan met moeite zijn grafsteen ontdekken, en thans heeft wel Den Haag zijn Archimedesstraat, maar een standbeeld voor Archimedes, of een Piazza Archimede wordt in Syracuse nog tevergeefs gezocht.

In Duitschland onthoudt men met een versje van Dahse 23 decimalen:

„Wie, o dies π macht ernstlich so vielen viele Müh?
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein
Wie so zum Beispiel dies möchte zu merken sein."

of met het versje van Metzdorff 30 decimalen:

„Dir, o Held, o alter Philosoph, Du Riesen-Genie!
Wie viel Tausende bewundern Geister himmlisch
[wie Du und göttlich!
Noch reiner in Aeonen wird das uns strahlen
[wie im lichten Morgenrot!"

(*Wordt vervolgd*).

Boekbespreking.

Encyklopädie der Elementar Mathematik, van Heinrich Weber und Joseph Wellstein. Erster Band Elementare Algebra und Analysis. Leipzig, Druck und Verlag van B. G. Teubner, 1903.

Na de tamelijk uitvoerige aankondiging van deel II bl. 183 kan ik over I kort zijn, te meer daar de sinds kort verschenen tweede druk van het werk mij niet onder de oogen gekomen is, en ik dus gevaar zou loopen over zaken uit te weiden die òf niet, òf veranderd in den nieuwen druk voorkomen.

Evenals in deel II worden hier de grondslagen behandeld, en wel uitsluitend door den bekenden analyst professor H. Weber, thans in Straatsburg. Natuurlijk is de behandeling heel modern; Weber begint echter niet, zooals zijn collega Wellstein, met het afbreken van de oude theorie. De opvatting en de geleidelijke uitbreiding van het begrip „getal" zijn ontwikkeld in de richting, die Dedekind daarvoor ingeslagen is in zijn werken „Was sind und was sollen die Zahlen?" en „Stetigkeit und irrationale Zahlen."

Vooral bij de grondslagen der Rekenkunde werkt schrijver veel met de methode der volledige inductie („à la Bernouilli"). Na de optelling en vermenigvuldiging (incl. machtsverheffing) verklaard te hebben, gaat hij tot de aftrekking over, en ontwikkelt dan het begrip „negatief getal." De

manier waarop dit geschiedt zal waarschijnlijk menigen lezer wat slap voorkomen. Schrijver zegt: Wir denken uns die Reihe der natürlichen Zahlen (ohne die Null) ein zweites Mal, und wenden diese zweite Reihe zur Zählung von Dingen an, die mit den Dingen, die wir durch die erste Zahlenreihe gezählt haben, in einer gewissen gegensätzlichen Beziehung stehen, wie etwa Dinge die rechts liegen und Dinge die links liegen, Thermometergrade über dem Gefrierpunkt nnd unter dem Gefrierpunkt, Vermögen und Schulden. Zum Unterschied müssen wir diese zweite Zahlenreihe durch eine Marke von der ersten unterscheiden. Wir nennen, wenn ein solcher Gegensatz gemacht werden soll, die ersten Zahlen die positiven Zahlen, die zweiten die negativen Zahlen", enz. Schrijver stelt $+2$ identiek gelijk met 2. Voor de zoo verkregen reeks der geheele getallen „stellen wir durch folgende Vorschrift eine Gröszenordnung her: Die positiven Zahlen sind alle gröszer als Null, die negativen kleiner als Null." Om met de verkregen getallenreeks te kunnen rekenen „geben wir nun aus eigener Machtvollkommenheit unseres Geistes folgende Rechenvorschriften, wobei wir uns von dem Grundsatz leiten lassen dasz die schon bekannten Rechenregeln im Gebiete der natürlichen Zahlen als Spezialfälle in den neuen Regeln enthalten sind, und dasz die Gesetze, die wir dort erkannt haben, nach Möglichkeit in dem umfassenderen Gebiete aufrecht erhalten werden."

Na de deeling komen natuurlijk de breuken ter sprake. Schr. zegt dat men tot het begrip „breuk" op de eenvoudigste manier zóó komt „Es sei m ein Zeichen, das jede Zahl (Null, positiv, negativ) bedeuten kann, und n ein Zeichen für eine positive Zahl. Das aus diesen beiden Zeichen zusammengesetze Zeichen m/n oder $\frac{m}{n}$ (gesprochen: m geteilt durch n, oder m über n) ist also durch irgend zwei Zahlen m und n vollständig bestimmt Wir wollen es eine gebrochene Zahl oder einen Bruch nennen und darüber folgende Festsetzungen treffen ..... Die beiden Zeichen m/n und qm/qn sollen, wenn q eine beliebige (positive) Zahl ist, dasselbe bedeuten oder den gleichen Wert haben." Of iemand, die nooit van een breuk gehoord heeft, zóó werkelijk tot een intensief begrip van dat nieuwe idee komt, en of een dergelijke vaststelling der principes meer dan eene voorloopige zijn kan, waag ik te betwijfelen.

Ter gelegenheid van de worteltrekking wordt het begrip getal weer uitgebreid (irrationeele getallen). Daarna worden verhoudingen, machten en logarithmen besproken. De vergelijkingen van den eersten graad met een en met twee onbekenden, waarbij de leer der determinanten direct ingevoerd wordt, worden door Schrijver nog onder Rekenkunde behandeld, even als die met drie onbekenden, de vierkantsvergelijkingen (imaginaire getallen incluis), de Permutaties en Combinaties en verschillende toepassingen (binomium, reeksen, interestrekening). Het eerste hoofdstuk der Algebra handelt over algebraïsche vergelijkingen; in de eerste paragraaf daarvan wordt uiteengezet wat een functie is; het boek „Algebra" eindigt met de verdeeling van den cirkel (incl. zeventienhoek) en tamelijk elementaire bewijzen van de onmogelijkheid een kubische vergelijking door vierkantwortels op te lossen, en (in 't algemeen) eene van den vijfden graad door wortels.

In het laatste boek, „Analysis", worden behandeld: de oneindig voortloopende reeksen, de convergentie, de binomiaalreeks, de logarithmische reeksen en de „Transcendenz" van e en van π (voor e beslaat het bewijs ruim vier bladzijden, voor π ruim vijf en een halve). Het boek sluit met de volgende „Zusätze": Kongruenzen höheren Grades; Existenz von Primitivwurzeln einer Primzahl; Algebraische Bestimmung der Einheitswurzeln.

Een troost voor ons, mindere goden, is het als we zien dat een geleerde als Weber in deel II drie fouten uit zijn deel I verbetert, waaronder de tamelijk belangrijke, dat hij in een bewijs een eigenschap gebruikt, die dan nog niet bewezen is. Die fouten zullen wel in den tweeden druk verbeterd zijn; bedriegt mijn geheugen mij niet, dan zegt de aankondiging van den tweeden druk dat, met het oog op het onderwijs aan sommige middelbare scholen in Duitschland, de beginselen der Differentiaal- en Integraalrekening daarin opgenomen zijn.

De Wiskundigen die belangstellen in de fondamenten hunner Wetenschap vinden in de twee deelen (die weldra door een derde over de toepassingen zullen gevolgd worden) een vrij wel eenig werk daarover. Zeker is de studie er van dringend aan te raden aan hen, die over de beginselen der Wiskunde een leerboek wenschen te schrijven; de eenige nieuwe boeken die, bij den overvloed van de bestaande, recht hebben het licht te zien zijn die, waarin getracht

zal worden een compromis te sluiten tusschen de resultaten van de jongste onderzoekingen en het bevattingsvermogen van jeugdige leerlingen. Van de leerboeken die in de laatste jaren verschenen zijn en denzelfden kost voorgezet hebben als de vroegere (dikwijls nog wat slechter toebereid) kon niet gezegd worden dat zij „in een lang gevoelde behoefte voorzien hebben." C. A. Cikot.

Een drietal merkwaardige boeken.

Om te beginnen kondigen we hier aan het boekje van Dr. R. Schröder, Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung, für Schüler von höheren Lehranstalten. (Leipzig, Teubner, 1905). In de voorrede zegt de schrijver: „..... ich habe die in den preuszischen Lehrplänen vor 1901 gelassene Freiheit benutzt, um mit unseren Primanern nach der analytischen Geometrie der Ebene und nach der niederen Analysis die Elemente der höheren durchzunehmen. Aus der Praxis dieses Unterrichtes ist das Buch erwachsen. Da die Erfolge bei uns günstige waren, hoffe ich den Herren Kollegen mit der Veröffentlichung vielleicht nützen zu können." En verder, „An Schulen, welche die Elemente der analytischen Geometrie und der niederen Analysis lehren, dürfte die Durchnahme des Gebotenen nicht nur keine Schwierigkeit bereiten, sondern vielmehr für die Lösung zahlreicher Aufgaben eine wesentliche Erleichterung und Zeitersparnis bringen." En ten slotte „Ohne ernste geistige Anstrengung ist freilich nichts zu erreichen; ich bin jedoch der Meinung, dasz wir Lehrer zwar zu den Knaben hinabsteigen, die Jünglinge aber zu uns empor ziehen sollen!"

De schrijver behandelt achtereenvolgens het differentieeren van eenvoudige algebraïsche functies, dan eenvoudige transcendentale (ook de logarithmische en de exponentieele); daarna het differentieeren van functies, de herhaalde differentieering, en het differentieeren van impliciete functies.

De reeksen van Taylor en van Maclaurin worden *niet* behandeld.

De schrijver behandelt verder de bijzondere vormen: $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, enz. Wat den eersten vorm betreft, moeten we opmerken, dat voor een bijzondere behandeling daarvan (ten minste in de eenvoudigste gevallen), de Differentiaalrekening overbodig is; immers, als $F(x)$ en $f(x)$ voor

$x = a$ nul worden, zijn ze beide deelbaar door $x - a$, en die deeling kan in de bedoelde gevallen in den regel door leerlingen van eene middelbare school uitgevoerd worden.

De maxima en minima worden behandeld in verband met de grafische voorstelling der correspondeerende functies. Eindelijk wordt de differentiaalrekening toegepast op het onderzoek van lijnen (raaklijn, normaal, kromming, buigpunten en ontwondene). De integraal-rekening wordt toegepast op kwadratuur en rectificatie. Het slot-kapittel behandelt de toepassing van de analyse op de Mechanica (snelheid, versnelling, sinus-slingering, wet der perken, enz.).

Zoo sterk voorstander als we zijn van de invoering van de beginselen der Infinitesimaal-rekening op de middelbare school, zoo'n sterk tegenstander zouden we zijn van de invoering dezer theorie in den omvang als dit boekje geeft.

Wat de differentiaal-rekening betreft, zouden we nog eerder overgaan tot een ander uiterste, de sobere behandeling daarvan die de bekende Parijsche professor Emile Borel geeft in zijn „*Algèbre*", 2 cycle. Deuxième édition, Paris, A. Colin.

Alleen de voorrede van dit boekje is het geld waard:

„En écrivant ce livre, mon but principal a été d'intéresser les élèves; je ne crois pas que le meilleur moyen de les initier aux sciences mathématiques soit d'insister sur les côtés les plus abstraits de ces sciences, de manière à les présenter comme complètement en dehors et au dessus de la réalité. Quelque puisse être l'intéret — que je mis loin de contester — de la spéculation pure, il n'est pas douteux que c'est l'observation des faits les plus usuels et les nécessités de la vie pratique qui ont été l'origine de toutes les sciences. A méconnaître cette origine, on s'expose à dégoûter un grand nombre d'excellents esprits, auxquels la science apparait comme une chose mystérieuse, complètement à part de la vie, alors qu'elle s'y mêle chaque jour." .... En résumé, j'ai tâché, sans abandonner jamais la rigueur nécessaire, d'être aussi simple et pratique que possible."

Als het in de grondwet van dit Tijdschrift niet verboden was, zouden we de heele voorrede hier overschrijven.

In enkele bladzijden behandelt schrijver wat hij geeft als „Notions sur les dérivées." Transcendentale en impliciete functies behandelt hij niet; ook bij hem is een machtig hulpmiddel de grafische voorstelling der functies.

Het derde merkwaardige boek is de *Géométrie* van Borel (Premier et second cycles), eveneens bij Colin uitgegeven. Ook in de voorrede van dit boekje staan rake opmerkingen: „Je ne prétends pas offrir ici un édifice géométrique complet, basé sur ces nouveaux principes; cette tâche me paraît trop lourde pour un seul homme" (een snuifje voor zijn collega Méray?). „..... C'est pourquoi j'ai cherché à écrire une Géométrie plus concrète, où les considérations de symétrie, de déplacements, sont invoquées le plus souvent possible. Les démonstrations qui en résultent sont plus simples et me paraissent plus claires que les démonstrations euclidiennes."

We kunnen niet anders dan het verschijnsel toejuichen, dat de quasi-philosophie meer en meer verdwijnt uit de leerboeken voor kinderen van 12—13 jaar. Maar, van den anderen kant moet het ons toch van het hart, dat een zóó concrete, zóó physische behandeling van de Meetkunde als Borel geeft, op het kantje af is.

Wat hiervan ook zij, we bevelen de studie van de drie genoemde boekjes in de attentie van de collega's aan; 't wordt meer dan tijd dat door ons wiskunde-onderwijs de verfrisschende wind eens waait. C. A. Cikot.

Vraagstukken.[1)]

(*Oplossingen kunnen worden ingezonden aan den Hoofdredacteur voor 25 December 1906. Nieuwe opgaven, vergezeld van de oplossingen, worden gaarne verwacht.*

Verzoeke het papier slechts aan één kant te beschrijven, en voor elke oplossing een afzonderlijk vel papier te nemen.)

111. Door een gegeven lijn een vlak te brengen, zóó dat de sinussen van de hoeken, die het met de twee projectievlakken maakt, een gegeven verhouding hebben.

C. A. Cikot.

112. In „Stereometrische vraagstukken" van ondergeteekende komt op bl. 81 het volgende vraagstuk voor:

Errata: Vraagstuk 95, bl. 135 moet gelezen worden:
Bepaal de meetkundige plaats *van de snijpunten der lijnen,* uit een brandpunt van een ellips onder eenzelfden hoek met de raaklijnen getrokken, *met de raaklijnen.*

„Als in een viervlakkenhoek de sommen van de overstaande hoeken gelijk zijn, kan om dien viervlakkenhoek een omwentelingskegel worden beschreven. (Uit het ongerijmde). Men verlangt van deze eigenschap een rechtstreeksch bewijs. C. A Cikot.

113. Bewijs rechtstreeks de (met No 112) overeenstemmende eigenschap voor een viervlakkenhoek, waarin de sommen van de overstaande zijden gelijk zijn.
C. A. Cikot.

114. De beweging na te gaan van het zwaartepunt van twee even zware stoffelijke punten, die beide een rechtlijnige beweging hebben; het eene beweegt zich eenparig, het tweede eenparig versneld, zonder aanvangsnelheid; de twee wegen liggen *niet* in één vlak.
C. A. Cikot.

115. Door een gegeven punt een vlak aan te brengen, zóó dat de driehoek gevormd door zijn drie doorgangen gelijkvormig is met een gegeven driehoek. Discussie.
C. A. Cikot.

116. Door een punt binnen een ellips een koorde te trekken zóó, dat het product van hare twee stukken *a*) maximum, *b*) minimum zij. C. A. Cikot.

117. Dezelfde vraag voor een punt binnen eene ellipsoïde. C. A. Cikot.

118. In een wig van Wallis den maximum rechten cilinder te beschrijven. C. A. Cikot.

119. In ieder van de zijden van een drievlakkenhoek trekt men door het hoekpunt een lijn zóó, dat de vlakken, welke door die lijnen en de overstaande ribben gaan, elkaar volgens dezelfde lijn snijden. Bewijs, dat ook door ééne lijn zullen gaan: *a*) de vlakken, die door de ribben gaan en door de lijnen, die in de overstaande zijden isogonaal verwant zijn met de eerste; *b*) de vlakken, die met de eerste isogonaal verwant zijn ten opzichte van de zijden.
C. A. Cikot.

120. Men vraagt een kort meetkundig bewijs voor de eigenschap: De raaklijn in een willekeurig punt van een parabool maakt gelijke hoeken met de as en met de beschrijvende lijn van den omwentelings-kegel, op welks

oppervlak de parabool ligt. (Voor een meer ingewikkelde oplossing, zie „Vraagstukken wiskundig genootschap", no. 220, 1860—1865). C. A. Cikot.

121. Een algemeene Wallace-lijn is gegeven door het punt P op den omgeschreven cirkel en den hoek, dien zij insluit met de zijden, alzoo door (P, α), α te rekenen van 0° tot 180°.

Toon aan, dat de hoek δ, dien twee Wallace-lijnen met elkaar insluiten, gevonden wordt uit:

$$2\delta = \gamma + 2(\beta - \alpha).$$

W. F. Gisolf.

(Men zie: „The general Wallace-line of an inscribed polygon" by Dr. Quint, Nieuw Archief voor Wiskunde, 2e reeks, deel III bl. 153, 1897).

122. Gegeven: Twee elkaar kruisende rechten.

Gevraagd: 1o. De meetkundige plaats te bepalen van de rechten, die as kunnen zijn van de omwentelingshyperboloïden, op welke deze 2 rechten gelegen zijn.

2o. Uit deze meetkundige plaats een eenvoudige constructie af te leiden voor een as in een vlak // aan één der gevonden richtvlakken. O. Postma.

123. Binnen elken willekeurigen veelhoek kan een punt worden aangewezen, zoodanig dat de krachten, die in richting en en grootte worden voorgesteld door de lijnen, welke dit punt [1]) met de hoekpunten verbinden, met elkander in evenwicht zijn. Men vraagt dit punt te construeeren voor een willekeurigen vierhoek, vijfhoek, enz. F. J. Vaes.

124. Het voorgaande vraagstuk kan worden uitgebreid tot veelhoeken, waarvan de hoekpunten willekeurig in de ruimte verspreid liggen. Men vraagt aan te geven, hoe het bedoelde punt [1]) zou kunnen bepaald worden (bijv. met behulp van beschrijvende meetkunde), wanneer het aantal puuten vier, vijf, enz. bedraagt. F. J. Vaes.

125 *a*. In een plat vlak zijn twee stelsels met m en n punten gegeven. De lijnen, welke deze punten met eenzelfde punt S verbinden, stellen in grootte en richting

[1]) Dit punt zal bij de oplossing „evenwichtspunt" genoemd worden. Door Steiner is indertijd aangetoond, dat zulk een punt voor elken veelhoek bestaan moet. In de verz. van vraagst. over werktuigkunde van Scheltema wordt gevraagd het punt te bepalen voor een viervlak.

krachten voor. Men vraagt de meetkundige plaats van S te bepalen, als de resultanten der beide krachtenstelsels een gegeven verhouding $q:p$ moeten hebben.

b. Als drie puntenstelsels l, m en n gegeven zijn, het punt S te bepalen, zoodanig dat de resultanten der drie krachtenstelsels, die van S uitgaan, zich verhouden als $p:q:r$.

c. De uitbreiding van a en b voor puntenstelsels in de ruimte gevraagd. F. J. VAES.

126. Is A_1 het punt, waar de buitenbissectrix van $\angle$ A de overstaande zijde van $\triangle$ ABC ontmoet, en stelt men de zijden voor door de normaalvergelijkingen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ en $\gamma = 0$, dan wordt een lijn door A_1 voorgesteld door $k\alpha + \beta + \gamma = 0$. Trekt men door de gelijksoortige punten B_1 en C_1 de lijnen $\alpha + k\beta + \gamma = 0$ en $\alpha + \beta + k\gamma$, met gelijken parameter k, dan sluiten deze lijnen een driehoek in, waarvan men den inhoud vraagt uit te drukken in k en de zijden van $\triangle$ ABC. H. G. A. VERKAART.

127. Indien tusschen de zijden van een $\triangle$ de betrekking bestaat $c^4 = a^4 - a^2 b^2 + b^4$, heeft men de volgende betrekking tusschen de hoeken

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 4 \sin^2 C.$$

H. G. A. VERKAART.

128. Gegeven drie cirkels C_1, C_2 en C_3; middelpunten a_1, b_1, enz.; stralen r_1, enz. Gevraagd de vergelijkingen van den cirkel, die met C_1 en C_2 de machtlijn gemeen heeft, en den omtrek van C_3 middendoordeelt. (KI, 1905; algemeener gesteld). H. G. A. VERKAART.

129. Op de basis BC van een $\triangle$ ABC een punt D te vinden, zóó gelegen, dat de ingeschreven cirkels van de $\triangle\triangle$ CDA en BDA gelijk zijn. H. G. A. VERKAART.

130. x en y te elimineeren uit de vergelijkingen:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} C + 2 \operatorname{cotg} A, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{cotg} B + 2 \operatorname{cotg} A, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\cos x \sin B = \cos y \sin C, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarin A, B en C hoeken tusschen 0 en 180° zijn.

H. G. A. VERKAART.

Vraag en Antwoord.

Antwoord op vraag 6, bl.139. Als in het algemeen een stelsel van twee vergelijkingen van den tweeden graad met twee onbekenden gegeven is, bestaat de volgende, op meetkundige beschouwingen gegronde, oplossing. Bij gebruik van een rechth. assen-stelsel stellen de verg. nl. kegelsneden voor. Deze twee kegelsneden bepalen een bundel, en de coördinaten van de vier grondpunten van den bundel zijn de bij elkaar behoorende wortels van de verg. Om deze nu te vinden zoeken we die exemplaren van den bundel kegelsneden, welke ontaard zijn in twee rechte lijnen. Zooals bekend is, bedraagt dit aantal drie, waarvan echter twee voor ons doel voldoende zijn. Het vraagstuk is dan teruggebracht tot het oplossen van vier malen twee verg. van den eersten graad, of ook kan men twee van dergelijke verg. die een lijnen-paar voorstellen, combineeren met een van de oorspronkelijke verg.

Passen we dit nu toe op het gegeven stelsel:

$$x^2 + y = a, \qquad y^2 + x = b.$$

Deze verg. stellen parabolen voor, waarvan de assen $\perp$ op elkaar staan. Ze bepalen den bundel kegelsneden:

$$x^2 + y - a + \lambda (y^2 + x - b) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

waarin λ veranderlijk.

Voor het geval van een lijnen-paar moet nu, zooals bekend is, de determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -2(a + \lambda b) \end{vmatrix} \text{ verdwijnen, of}$$

$$\lambda^3 + 4\,b\,\lambda^2 + 4\,a\,\lambda + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

waaruit op de bekende wijze λ op te lossen. Voor de gevonden waarden van λ is dan het linker lid van (1) te ontbinden en zijn de verg. van den eersten graad bekend. Voor $\lambda = -4\,p$ gaat (2) over in de verg. van den heer V.

Amersfoort. G. D. Rasch.

Antwoord op vraag 7, bl. 140. Aan te bevelen boeken voor het examen K^{II} zijn:

1. M. H. Spruijt. Elementair Leerboek der Mechanica, 2e druk, waarbij
   Dr. C. A. Scheltema. Vraagstukken over werktuigkunde, 2e druk.
2. Aug. Ritter. Lehrbuch der technischen Mechanik.
3. Ch. Delaunay. Practische en theoretische mechanica, bewerkt door Chr. Krediet, 2e deel, laatste gedeelte.
4. Egbert Hoyer. Lehrbuch der vergleichenden mechanischen Technologie, 2 deelen, vooral het 1e deel.

Voor de kennis van werktuigen meen ik, dat geen geschikt boek bestaat; het is dan ook noodig, zich voor dit onderdeel in verbinding te stellen met een ingenieur of wel de colleges der Tech. Hoogeschool te volgen.

Het bezoeken van eenige groote fabrieken is zeer noodzakelijk, b.v. de Ned. fabriek van Werktuigen en Spoorwegmaterieel te Amsterdam, de houtschaverij en creosoteerinrichting van Gebr. Hulsinga te IJsselmonde, enz. enz.

Rm. W. T.g

Over Mechanische technologie is ook een boek geschreven door E. Ekker, Inspecteur van den arbeid (uitgever Noorduyn, Gorinchem).

Onder den titel „Kennis van Werktuigen" is indertijd een boek verschenen van D. Grothe (Arnhem, D A. Thieme, 1874). Het eerste deel (dat niet door een 2e gevolgd is) behandelt machines voor het hijschen van lasten en het opvoeren van water.

Voor sommige werktuigen is dit nog goed bruikbaar; voor andere is het niet meer up to date. Het is in de bibliotheek der Techn. Hoogeschool aanwezig. Red.

Vraag 8. Het komt mij voor, dat het 12-tallig stelsel vele voordeelen bezit. Is al wel eens voorgesteld dit in plaats van het decimale te stellen? v. E. te H.

Antwoord 9. Zeker, o.a. door Gauthier in de Comptes Rendus 1838, 1848, 1849. Maar zoo'n fameuse revolutie zal de menschheid in afzienbaren tijd wel niet aandurven.

Q.

Vraag. Zijn er geen Nederlandsche woorden voor prisma en pyramide? NEERLANDICUS te W.

Antwoord. De Vlamingen gebruiken de namen kantzuil en spitszuil, die o. i. het wezen dier lichamen zeer goed weergeven. Q.

Vraag 10. Ik heb de gewoonte bij het behandelen der logarithmen ter inleiding vraagstukken te geven, die geene interpolatie noodig maken; eerst daarna wordt de laatste bewerking door mij behandeld. Ik doe dit om mijnen leerlingen zoo spoedig mogelijk het groote nut der logarithmen te laten zien. Ik heb echter nog al moeite om geschikte vraagstukken te vinden Bestaat er niet iets, wat mij van dienst kon zijn. W. te B.

Antwoord. Het vorige jaar verscheen bij Deuticke te Leipzig: Hartl. Zur Einführing in die Logarithmen-Lehre, mit einer Sammlung von Beispielen für deren logarithmische Ausführung keine Interpolationen nötig sind.
Het is een handig boekje van 80 Pf. Q.

Vraag 11. Ik zocht getallen, die men verdubbelen kan door het cijfer der eenheden vooraan te plaatsen. Ik kreeg ze door met een willekeurig cijfer te beginnen en dit te verdubbelen, zooals blijkt uit:

210526315789473684
421052631578947368
842105263157894736

Hoe komt het, dat ik zoodoende steeds getallen van 18 cijfers vind? v. D. te 's Gravenhage.

Correspondentie.

Opmerking omtrent vraagstuk 21. (Zie Oplossingen bl. 2.)

Lobatto, „Lessen over de hoogere Algebra" ontwikkelt in het hoofdstuk „Over het verband tusschen de goniometrische, de exponentieele en de logarithmische funtiën" o. a. de reeksen

$$a \sin \Phi + \frac{a^2}{2} \sin 2\Phi + \frac{a^3}{3} \sin 3\Phi + \text{enz.} =$$

$$B\left(\operatorname{tg} = \frac{a \sin \Phi}{1 - a \cos \Phi}\right) \quad (25),$$

$$a \cos \Phi + \frac{a^2}{2} \cos 2\,\Phi + \frac{a^3}{3} \cos 3\,\Phi + \text{enz.} =$$

$$l \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 - 2\,a \cos \Phi)}} \right\} \quad (26),$$

en zegt verder:

„De reeksen (25) en (26) vinden onder anderen een nuttige toepassing, zoo in de rechtlijnige als in de spherische driehoeksmeting, bij het berekenen van eenen onbekenden hoek, of van de derde zijde eens driehoeks, ingeval twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijn enz."

Noemende α, β de zijden, Φ den ingesloten hoek en stellende $\frac{\beta}{\alpha} = a$, zijn bovenstaande reeksen onmiddellijk op het geval van toepassing.

„Ook de spherische driehoeken, zoowel de rechthoekige als de scheefhoekige bieden onderscheidene gevallen aan, welke vatbaar zijn om met behulp der voorgaande reeksen opgelost te worden, waaromtrent wij degenen, die met deze fraaie toepassingen nader verlangen bekend te worden, vermeenen te moeten verwijzen naar onze „Gronden der spherische Driehoeksmeting, bladz. 47 en volg.".

Ook wordt nog aangehaald:

Lobatto. *Recherches sur la sommation de quelques séries trigonometriques. 1827.*

Leeuwarden. M. de Vos.

Het is mij in het geheel niet duidelijk, waarom het stukje van den heer Kroon in de 3e afl., 2en jaarg., van het W. T. geschreven is, daar reeds op dezelfde wijze maar voor een veel algemeener geval het rationaal maken van den noemer door den heer F. T. A. Cedee in het W. T. behandeld is. De heer Kroon merkt op, dat hij het niet eens is met het door de heeren D. en d. L. gegeven bewijs, zonder te zeggen in welk opzicht. Daar echter het bewijs van den heer Kroon op een kleinigheid na precies hetzelfde is als dat van de heeren D. en d. L., moet zijn bezwaar die kleinigheid gelden. Het verschilpunt, dat ik heb kunnen ontdekken is het volgende. De heeren D. en d. L. maken gebruik van het symmetrisch zijn van het product; het even zijn der exponenten hoeft dan slechts voor één der letters te worden aangetoond. De heer Kroon

maakt hiervan geen gebruik, en geeft een afzonderlijk bewijs voor a en voor een der andere letters. Het bewijs dat de heeren D. en d. L. voor de symmetrie geven is m.i. in orde, mits natuurlijk het aantal wortels grooter dan 2 is, hetgeen daar blijkens de geheele afleiding ondersteld wordt. Wel kan dit bewijs vereenvoudigd worden door te laten zien, dat een verwisseling van a en b of van b en c slechts een verwisseling van factoren geeft, maar dit is toch bijna de moeite niet waard.

Een kleine opheldering, waarin dan toch eigenlijk de onjuistheid (of wat het zijn mag) van het bewijs der heeren D. en d. L. schuilt, is dunkt mij niet ongewenscht.

Sneek. Dr. Fred. Schuh.

Korte opmerkingen bij blz. 156 en vlgde.

(5) kan rechtstreeks uit (1) gevonden worden door voor x te substitueeren $\frac{1}{x}$.

Evenzoo (6) uit (2) door dezelfde substitutie, en door n te vervangen door $n - 1$.

Bij E = (5) heeft men ook

$$E_{p+1} - x\,E_p = (p+1)(x-1)^2.$$

Bij C = (3) heeft men

$$(n+1)\,C_{n+1} - (n+2)\,C_n = B.$$

Voorts is het duidelijk, dat de deelbaarheid van al deze vormen ook kan worden aangetoond door van de afgeleiden gebruik te maken. H. G. A. Verkaart.

Naar aanleiding van No. 7, blz. 176, 2en jaarg. W. T.

Het bewijs dezer stelling kan ook zeer eenvoudig als volgt luiden:

$\angle$ CMF = $\angle$ A = 60°, dus $\triangle$ CMF is gelijkzijdig. Hieruit volgt AH = 2 MD = EM. Dus EA = MH.

$\triangle$ BCE is gelijkzijdig, bijgevolg AC = AE + AB, of MH = AE = AC — AB.

De gelijksoortige stelling, wanneer $\angle$ A = 120°, is MH = AC + AB.

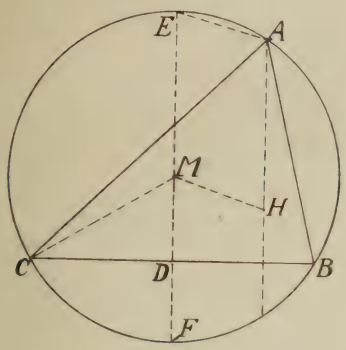
Deze laat zich op dergelijke manier bewijzen:

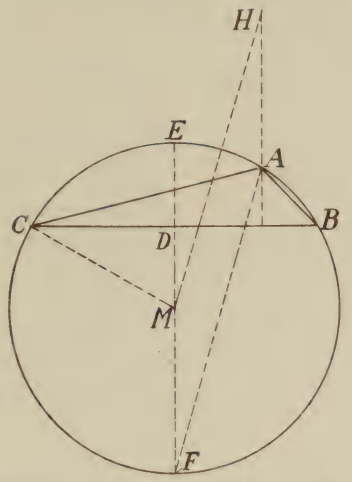
$\angle$ CMD = 60°, dus MD = $\frac{1}{2}$ R.

AH = 2 MD = MF, dus ook MH = AF.

$\triangle$ BCF is gelijkzijdig, waaruit volgt AF = AC + AB.

Uit deze beide bewijzen volgt tevens, dat in 't eerste





geval de lijn MH evenwijdig is aan de buitenbissectrix van ∠ A, in 't tweede geval aan de binnenbissectrix.

Haaksbergen. H. G. A. VERKAART.

Nieuw verschenen werken.

(Door de redactie ontvangen.)

Uitgaven van J. B. Wolters, Groningen:

Dr. A. VAN THIJN. Beknopt leerboek der Stereometrie. 1906. f 1.25.

Dr. C. D. SCHöNFELD. Beknopt leerboek der Planimetrie. Vijfde druk. 1906. f 1.—.

D. W. REINDERS. Repetitor of 44 repetitielessen in 't vak rekenen voor kandidaat onderwijzers. 1906. f 0.40.

N. J. VISSCHER. Tal van oplossingen van de rekenkundige vraagstukken, opgegeven bij het acte-examen (77A) 1905 in de 1e inspectie; enz. 1906. f 0.75.

Uitgaven van P. Noordhoff, Groningen:

Dr. J. KORS. Leerboek der Stereometrie met opgaven. Tweede druk, herzien door Dr. O. Postma. 1906. f 1.—.

Dr. J. KORS. Leerboek der Algebra met opgaven. Tweede deel. Tweede druk, nagezien door Dr. O. Postma. 1905. f 0.60.

W. H. WISSELINK. Vragen en Oefeningen over de Theorie der Rekenkunde. Eerste stukje. Vijfde druk. 1906. f 0.60.

..... Kern van de Theorie der Rekenkunde. Eerste stukje. Vijfde, gewijzigde druk. 1906. f 0.50.

..... Kern van de Theorie der Algebra. Vierde, herziene druk. 1905. f 0.50.

..... Vraagstukken ter Oefening in de Meetkunde. Eerste stukje. Twaalfde, herziene druk. 1905. f 0.30.

F. M. JAEGER. Beginselen der vlakke Coördinatenleer. Tweede, omgewerkte druk. Met 30 figuren. 1906. f 1.00.

L. v. ZANTEN Jzn. en G. A. SCHOLTEN. Leerboek der Meetkunde ten gebruike bij het onderwijs voor Ambachtslieden, bevattende 425 opgaven, meest aan de bouwvakken ontleend. Zevende, herziene druk. Met 80 figuren. 1906. f 0.75.

L. v. ZANTEN Jzn. Verzameling van rekenkundige opgaven voor het uitgebreid lager en middelbaar onderwijs. Eerste stukje, 3e druk. 1906. f 0.40.

E. J. REINDERS. De Ambachtsjongen. Opgaven voor leerlingen van ambachtsscholen, gemeente-avondscholen, herhalingsscholen en voor zelfoefening. Derde, vermeerderde druk. Met 93 figuren. 1906. f 0.35.

Uitgaven van Vincent Loosjes, Haarlem:

P. J. BOS. Leerboek der Algebra, Theorie en Opgaven. Eerste deel. (Met meer dan 1900 opgaven). Zevende, verbeterde druk. 1906. f 1.25.

Dr. JAN DE VRIES en W. H. L. JANSSEN VAN RAAIJ. Leerboek der vlakke meetkunde. Derde druk. 1906.

Uitgave van Æ. E. Kluwer, Deventer:

F. J. VAES. Graphostatica. Tweede gedeelte. Zwaartepunten. 1906. f 1.25.

Uitgave van W. J. Thieme & Co., Zutphen:

H. A. DERKSEN en G. L. N. H. DE LAIVE. Leerboek der Stereometrie.

Uitgave van de Kon. Mil. Ac., Breda:

N. C. GROTENDORST en J. W. C. BEELENKAMP. Gronden der Beschrijvende Meetkunde. Eerste deel met Aanhangsel. Negende druk. Tekst 1906. Atlas 1905.

Examen-opgaven in 1905

Examens B en C aan de Technische Heegeschool te Delft.

Art. 61, 62, 64, 65.

Analytische Meetkunde.

1. Bepaal de vergelijking van den cirkel, die gaat door de snijpunten der cirkels $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ en $x^2 + y^2 = 9$, en die den cirkel $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 29 = 0$ zoodanig snijdt, dat de verbindingslijn der snijpunten eene middellijn is van den laatsten cirkel.

2. Gegeven de ellipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en de vlakken $x = \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}b$. Bepaal:

A. Het oppervlak van den tweeden graad, dat door de doorsneden der ellipsoide met deze vlakken en door het middelpunt der ellipsoide gaat.

B. De meetkundige plaats der middelpunten van alle oppervlakken van den tweeden graad door de snijkrommen.

3. Men beschouwt de raaklijnen aan het oppervlak $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 1$, welke door eenzelfde punt P gaan. Bewijs, dat de raakpunten op een boloppervlak gelegen zijn, wanneer P zich bevindt in eene zekere rechte lijn, die door den oorsprong gaat.

Art. 62 B_1.

Analytische Meetkunde.

1. Bepaal de vergelijking van den cirkel, die gaat door de snijpunten der cirkels $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ en $x^2 + y^2 = 9$, en die den cirkel $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 29 = 0$ zoodanig snijdt dat de verbindingslijn der snijpunten eene middellijn is van dien laatsten cirkel.

2. Aan een punt R eener parabool wordt eene raaklijn getrokken. Men verbindt R met het brandpunt F en bepaalt het snijpunt S van RF met de loodlijn uit den top der parabool op de raaklijn getrokken. Bepaal de meetkundige plaats van S als R veranderlijk is.

Differentiaalrekening.

1. Bewijs, dat $y = \frac{bg \sin x}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ voldoet aan de vergelijking

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} - xy - 1 = 0$$

en bepaal met behulp dezer vergelijking de coëfficiënten der eerste tien termen in de reeks van Mac Laurin, volgens welke de functie y kan worden ontwikkeld.

2. Wanneer men, met behoud van oorsprong en abscissen-as de rechthoekige coördinaten x en y van een punt vervangt door scheefhoekige u en v, die een hoek α met elkaar maken, dan geldt voor elke functie z der coördinaten de betrekking

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

Bewijs dit.

3. Gegeven de kromme lijn

$$4x^2 + y^2 = 4a^2,$$
$$x^2 + 2az = 2a^2.$$

Bepaal de punten, waarin de raaklijn de Z-as onder den grootsten of den kleinsten hoek kruist.

Art. 62.

Differentiaalrekening.

1. Bewijs, dat $y = \frac{bg \sin x}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ voldoet aan de vergelijking

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} - xy - 1 = 0$$

en bepaal met behulp dezer vergelijking de coëfficiënten der eerste tien termen in de reeks van Mac Laurin, volgens welke y kan worden ontwikkeld.

2. Er moet eene schuur van 300 M.^{3} binnenruimte met rechthoekigen plattegrond gebouwd worden. De zijmuren moeten 3 M. hoog zijn; de voor- en achtermuren moeten worden opgetrokken tot aan den nok van het dak en dus bestaan uit een rechthoekig gedeelte van 3 M. hoogte, waarop een driehoekig gedeelte, welks hoogte $\frac{2}{3}$ van de basis is; er zijn dus twee rechthoekige dakvlakken.

Daar men reden heeft om te verlangen, dat het metselwerk bij gegeven muurdikte zoo licht mogelijk zij, wordt

gevraagd bij welke lengte en breedte van het gebouw de muurvlakte het kleinst is.

Integraalrekening.

1. Integreer $\int \frac{\cos 4x + 2\cos 2x}{\cos^2 x} dx$.

2. Bereken het volumen van het lichaam, begrensd door de vlakken $z = 0$, $y = 0$, $x = a$, het cilindervlak $y^2 = ax$ en het oppervlak $az = x\sqrt{(a^2 - y^2)}$.

3. Bewijs dat de vergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right] = 0$$

alle parabolen in een plat vlak voorstelt.

Hoogere Stelkunde.

1. Hoe groot moet in de vergelijking

$$x^3 - (3 + a)x^2 + (2 + 3a)x - 2a = 0$$

de waarde van a zijn, opdat de wortels eene rekenkundige reeks vormen?

2. Bewijs dat de wortels van

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 1$$

alle bestaanbaar zijn.

Boldriehoeksmeting.

Van een boldriehoek ABC zijn de zijden

$$a = 70° 31' 42'', \quad b = 118° 6' 6'', \quad c = 75°.$$

Uit B trekt men de sferische loodlijn op CA, die CA in H snijdt. Hoe verhoudt zich de oppervlakte van den boldriehoek CHB tot die van den bol, waarop hij is gelegen?

Beschrijvende Meetkunde.

1. *Axonometrie.* Bepaal middelpunt, straal en axonometrische projectie van den *omgeschreven* bol van viervlak OXYZ. Van den tafereeldriehoek XYZ zijn de zijden gegeven, nl. XY = 19 cM., YZ = 25 cM., ZX = 27 cM.

2. Eene rechte a, die het horizontale projectievlak in een punt A snijdt, evenwijdig is aan het vertikale projectievlak, op een afstand van 4 cM. vóór dit vlak ligt, en met het horizontale projectievlak een hoek van 45° insluit (opening hoek naar rechts), is de as eener omwentelingsellipsoide. Het middelpunt M van dit oppervlak ligt boven

het horizontale projectievlak, en wel zoodanig, dat AM = 12 cM. is; de halve omwentelingsas heeft eene lengte van 8 cM., de straal van den grootsten parallelcirkel eene lengte van 6 cM.

Gevraagd door een punt P van a, dat boven het horizontale projectievlak ligt, en 32 cM. van A verwijderd is, de raakvlakken aan de ellipsoide aan te brengen, die loodrecht staan op het horizontale projectievlak.

3. Een omwentelingscilinder met een straal van 6 cM., en welks beschrijvende lijnen met het vertikale projectievlak een hoek van 45° insluiten (opening hoek naar links), rust met één zijner beschrijvende lijnen op het horizontale projectievlak.

De vertikaal door het snijpunt van de as van dezen cilinder met het vertikale projectievlak is de as eener omwentelingshyperboloide; het vlak van den keelcirkel dezer hyperboloide valt samen met het bovenste raakvlak van den cilinder, de straal van den keelcirkel heeft eene lengte van 6 cM., en de beschrijvende lijnen van het oppervlak sluiten met het horizontale projectievlak hoeken van 45° in.

Men vraagt de punten van de doorsnijding der beide oppervlakken te construeeren, die op eene hoogte van 9 cM. boven het horizontale projectievlak liggen, en in het punt, dat het meest naar voren ligt, de raaklijn aan te brengen.

Toegepaste Natuurkunde.

A.

Een dynamo met 220 volt klemspanning geeft een stroom van 25 ampère, die door twee koperdraden a en b elk van 550m lengte en 5 mm^2 doorsnede geleid wordt naar twee punten A en B. Van A loopt eene leiding door een weerstand r_1, naar 9 parallel geschakelde gloeilampen, die bij 110 volt branden en elk 55 watt verbruiken en van daar naar B. Eene andere leiding loopt van A door een weerstand r_2 naar een booglamp, die met 20 ampère en 45 volt spanning brandt, en dan naar B. Eene derde leiding gaat van A door een weerstand r_3 naar 5 cirkelvormige draadwindingen van koperdraad van 0,5 mm dikte, met een straal van 34,375 cm., die ook weer met B zijn verbonden. De draadwindingen zijn verticaal opgesteld in den magnetischen meridiaan In het middelpunt bevindt zich een magneetnaaldje, dat om een horizontale as door zijn

zwaartepunt kan draaien in een vlak, dat loodrecht op den magnetischen meridiaan staat.

De weerstand van 55m koperdraad van 1 mm^2 is 1 ohm, de verticale komponent van het aardmagnetisme is 0,5 C. G. S. eenheden.

Men vraagt:

1°. de grootte der weerstanden r_1, r_2 en r_3,

2°. de afwijking van de magneetnaald,

3°. het arbeidsvermogen per secunde geleverd door de dynamo, en het arbeidsvermogen, dat in de verschillende weerstanden en toestellen vrij komt of verbruikt wordt.

B.

1. Een stroomketen met een weerstand R en een coëfficient van zelfinductie L bestaat voor een deel uit twee draden evenwijdig aan elkaar loopende op een afstand l en uit een verbindingsstuk, dat over deze draden kan worden verschoven. Deze deelen van den stroomketen bevinden zich in een homogeen magnetisch veld H loodrecht op het vlak der beide draden. Het verbindingsstuk wordt verschoven met een constante snelheid v, waarvan de richting evenwijdig is aan de draden.

Men vraagt H te berekenen als gegeven is, dat de stroomsterkte t secunden na het sluiten van den stroomketen 136 mikroampère bedraagt, terwijl verder

$$R = 0{,}1 \text{ ohm}, \qquad L = 5 \times 10^7 \text{ C.G.S.}, \qquad l = 30 \text{ cm},$$
$$v = 10 \text{ cm/sec}, \qquad t = 0{,}5 \text{ sec}, \quad \text{basisgetal } e = 2{,}7.$$

De verandering van L en R door deze beweging kan verwaarloosd worden.

2. Eene tangentenboussole met ééne winding van 4 dm. middellijn bevat een korte magneetnaald A. De slingertijd van deze naald bedraagt $1^3/_4$ secunde. Een stroom van 5 ampère geeft aan de naald eene afwijking van 45°. Men plaatst nu een tweeden magneet B met een poolsterkte van 200 C.G.S. eenheden en een poolsafstand $l = 40$ mm. in een zelfde horizontale vlak met A in den magnetischen meridiaan ten zuiden van A, zoodat de noordpool van B naar A is toegekeerd en de afstand r der middens van beide magneten 40 cm. bedraagt.

Men vraagt bij dezen nieuwen toestand den slingertijd van A en de afwijking door een stroom van 5 ampère. De tweede en hoogere machten van l/r mogen bij deze berekening tegenover de lagere worden verwaarloosd.

Hoe zou men B in het horizontale vlak en in den magnetischen meridiaan moeten plaatsen om de horizontale intensiteit van het aardmagnetisme in het midden van A geheel te compenseeren? Van welken aard zijn de krachten die dan nog op de polen van A werken en welken stand zullen ze A doen aannemen?

Toegepaste Natuurkunde.

A.

1. Wanneer voor het drijven van een compressie-ijsmachine, waarin het werkend lichaam een proces van Carnot volbrengt, 25 pk. worden gebruikt, hoeveel kg. ijs van — 10° C. zal men dan per uur kunnen bereiden uit water van + 15° C., wanneer de temperatuur van den verdamper — 15° C. en van den condensator + 30° C. bedraagt?

Alle verliezen door transmissie, wrijving enz. worden buiten rekening gelaten.

Geef ongeveer den vorm van het druk-volume- en van het temperatuur-entropie-diagram.

In welke opzichten wijkt het proces, dat in de practijk door een compressie-ijsmachine wordt volbracht, van het hier onderstelde af?

Gegeven is: de smeltingswarmte van ijs = 80 cal, de s.w. van ijs = 0,5. het mechanisch equivalent van 1 kg.-cal = 427 kgm.

2. Een kilogram water van t° C. is samengeperst tot $2p$ atmosferen. Men laat dit water isotherm uitzetten totdat de druk geworden is p atm (het maximum van spanning van waterdamp bij t° C.), daarna volledig isotherm verdampen, ten slotte isotherm uitzetten, totdat de spanning gelijk is aan 1 atm. Men vraagt te berekenen den uitwendigen arbeid, die bij ieder dezer drie toestandsveranderingen door het water is verricht en tevens met welk bedrag (in caloriën) bij de verdamping de inwendige energie is toegenomen.

Men mag aannemen, dat de onverzadigde waterdamp zich gedraagt als een ideaal gas; 1 atmosfeer = 1 kg./cm.^{2} te stellen.

Verder is gegeven $p = 16$ atm, gewicht van 1 m^3 verzadigden damp bij t° C. = 7,943 kg., de verdampingswarmte bij t° C. = 464,1 cal, de coëfficient van samendrukbaarheid van water = 0,00005 per atmosfeer, het s.g. van water = 1, E = 427 kg.m./cal.

B.

Een staaf met cirkelvormige doorsnede (straal $= r$) en van de lengte $= l$, wordt in de uiteinden ondersteund en in het midden belast met een gewicht P; de richtingsverandering van de uiteinden bedraagt daarbij $\alpha°$.

Na het gewicht verwijderd te hebben wordt die zelfde staaf gewrongen door een koppel, dat aan ieder der uiteinden werkt en waarvan het moment = M; de hoek van wringing bedraagt dan $\theta°$.

Men vraagt hieruit te berekenen den elasticiteitsmodulus E, den glijdingsmodulus G, den coëfficient van zijdelingsche contractie μ en den compressiemodulus K.

Te substitueeren: $r = 25$ mm., $l = 3$m,, P = 56,6 kg., $\alpha = 0{,}5°$, M = 16100 kg.-mm., $\theta = 1°$.

(Het polaire traagheidsmoment voor een cirkelvormige doorsnede $= {}^1/_2\, \pi r^4$; de richtingsverandering van het vrije uiteinde eener aan één zijde ingeklemde staaf $= {}^1/_2\, Pl^2/EI$.)

C.

1. In een stoommachine wordt door den stoom de volgende kringloop doorloopen: *a*) isotherme verdamping bij $T_1°$ tot drogen stoom, *b*) oververhitting bij constanten druk tot $T_3°$, *c*) adiabatische uitzetting totdat de temperatuur $T_2°$ bedraagt, *d*) isotherme compressie bij $T_2°$ tot alles weer in water is overgegaan, *e*) verwarming van het water tot $T_1°$.

Wanneer ondersteld mag worden, dat alle veranderingen omkeerbaar geschieden, vraagt men: 1°. welk gedeelte van den waterdamp bij de adiabatische uitzetting condenseert, 2°. hoe groot bij deze machine de verhouding is van de in arbeid omgezette warmte tot de totaal toegevoerde warmte, 3°. hoeveel warmte per pk. en per uur wordt verbruikt, 4°. hoe groot het nuttig effect zou zijn, wanneer door den damp een kringloop van Carnot werd volbracht tusschen de temperaturen T_2 en T_3.

Geef ongeveer den vorm van het druk-volume- en van het temperatuur-entropie-diagram.

De s.w. bij constanten druk c_p van den onverzadigden damp wordt constant ondersteld; de s.w. van water steeds = 1 te stellen.

Te substitueeren: $T_1 = 165°$ C., $T_2 = 40°$ C., $T_3 = 260°$ C., $c_p = 0{,}48$, de verdampingswarmte bij $T_1° = 490$ cal, die bij 40° = 578 cal.

2. Leid uit de eerste wet van de mechanische warmtetheorie af de betrekking

$$c_p = c_v + \frac{1}{E}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,$$

waarin c_p voorstelt de s.w. bij const. druk, c_v die bij const. volume, E het mechanisch warmte-equivalent, p den druk, T de temperatuur, v het volume en U de inwendige energie, de beide laatste voor de eenheid van massa der stof.

Welken vorm neemt deze vergelijking aan voor ideale gassen?

Analytische Meetkunde (Technologen).

1. Men laat uit ieder punt van de topraaklijn eener parabool de loodlijn neer op de poollijn van dat punt. Gevraagd de meetkundige plaats van het voetpunt dier loodlijn.

2. In het brandpunt eener parabool richt men de loodlijn op de as der parabool op, trekt in de snijpunten dezer loodlijn met de kromme de raaklijnen, en beschouwt den driehoek die gevormd wordt door deze beide raaklijnen en die in den top. Gevraagd de vergelijking van den omgeschreven cirkel van dezen driehoek.

3. Het stuk eener raaklijn, begrepen tusschen de beide raaklijnen in de uiteinden van de groote as eener ellips, wordt van uit elk der beide brandpunten onder een rechten hoek gezien. Men vraagt deze stelling voor één der beide brandpunten te bewijzen.

Art. 60. Technoloog.

Boldriehoeksmeting. (1ste gedeelte, B_1.) 1 uur.

In een boldriehoek waarvan $\angle C = 90°$ is, heeft men

$$tg^2 a + tg^2 b + tg^2 a . tg^2 b = tg^2 c.$$

Men vraagt dit te bewijzen.

Analytische Meetkunde. (1ste gedeelte, B_1.) 3 uren.

I. 1. Een vloeistofdruppel in sferoïdaaltoestand heeft den vorm van een omwentelingslichaam met vertikale as.

Wanneer op een gegeven oogenblik:

a. het soortelijk gewicht is $= k$;

b. de vergelijking eener meridiaandoorsnede, waarbij de omwentelingsas voor de ordinaten wordt gebruikt, is

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - 2a^2 x^2 + 2a^2 y^2 - 3a^4 = 0,$$

hoe zwaar is dan de druppel?

2. Eene vloeistof wordt zonder nieuwen toevoer in een open vat op constante temperatuur gehouden. Hierin brengt men eene zekere hoeveelheid zout in poedervorm, welke oplost met eene snelheid, uitgedrukt door de formule

$$v = \frac{2at - 3t^2}{3x^2},$$

waarin x de reeds opgeloste hoeveelheid, t den daarbij verloopen tijd en a eene constante voorstelt.

Men vraagt:

a. de vergelijking voor den oplossingsduur te bepalen;

b. deze grafisch voor te stellen, zoo volledig mogelijk en met aangeven van asymptoten en alle bizondere punten;

c. hoeveel zout ten hoogste wordt opgelost en na hoeveel tijd dit gebeurt;

d. wat de beteekenis van a is.

II. 3 uren.

1. Men laat uit ieder punt van de topraaklijn eener parabool de loodlijn neer op de poollijn van dat punt. Gevraagd de meetkundige plaats van het voetpunt dier loodlijn.

2. In het brandpunt eener parabool richt men de loodlijn op de as der parabool op, trekt in de snijpunten dezen loodlijn met de kromme de raaklijnen, en beschouwt den driehoek die gevormd wordt door deze beide raaklijnen er die in den top. Gevraagd de vergelijking van den omgeschreven cirkel van dezen driehoek.

3. Het stuk eener raaklijn, begrepen tusschen de beide raaklijnen in de uiteinden van de groote as eener ellips, wordt van uit elk der beide brandpunten onder een rechten hoek gezien. Men vraagt deze stelling voor één der beide brandpunten te bewijzen.

Beschrijvende Meetkunde. (1ste gedeelte, B_1.) 2 uren.

1. *Axonometrie.* Een regelmatig achtvlak, waarvan de ribben 6 c.M. lang zijn, staat zoodanig op het XY vlak dat ééne der diagonalen verticaal en eene tweede gelegen is in het vlak, dat den ruimtehoek tusschen het XZ-vlak en het YZ-vlak middendoordeelt, terwijl het naastbij gelegen hoekpunt op 4 c.M. afstand van de Z-as verwijderd is.

In de Y-as bevindt zich een lichtend punt op 14 c.M. afstand van den oorsprong.

Breng dit lichaam met de eigen schaduw en met de slagschaduw op het XZ-vlak in axonometrische projectie.

In de axonometrische teekening maakt de Y-as een hoek van 120° met de X-as en een hoek van 135° met de Z-as.

2. In het horizontale vlak ligt eene ellips waarvan de assen 5 en 8 c.M. lang zijn; het middelpunt bevindt zich 3 c.M. vóór de as van projectie; de lange as maakt naar links een hoek van 30° met de as van projectie. Deze ellips beschrijft een omwentelingsvlak door draaiïng om de linker raaklijn, die loodrecht op de as van projectie staat.

Van een omwentelingskegel, hoog 14 c.M., ligt het grondvlak in het vertikale projectievlak, rakende aan de as van projectie en aan het verlengde van de genoemde raaklijn der ellips. De straal van het grondvlak is 6 c.M.

In een vlak, evenwijdig met het verticale projectievlak en gaande door het voorste uiteinde van de kleine as der ellips, liggen eenige punten van de doorsnede der beide omwentelingsvlakken.

Bepaal er één van en construeer de raaklijn in dit punt der doorsnede.

Mechanica. (1ste gedeelte B_1.) 3 uren.

1. Twee volkomen gelijke kogels worden met dezelfde aanvangssnelheid v_0 achtereenvolgens uit hetzelfde kanon geschoten, de eerste onder een elevatiehoek $\alpha = 60°$, de tweede onder een hoek $\beta = 30°$. Hoeveel maal is de grootste hoogte, die de eerste kogel bereikt, grooter dan die van den tweeden?

2. Gegeven een homogene draad in den vorm van een halven cirkel (dichtheid $= \rho$, doorsnede $= D$, straal cirkel $= r$). Welke aantrekking ondervindt (volgens de aantrekkingswet van Newton) een punt met de massa 1, geplaatst in het middelpunt van den cirkel?

3. Gegeven een cirkel (straal $= r$) en de verticale lijn, die dezen cirkel aan den linkerzijde aanraakt. Eene rechte l, die steeds den cirkel aanraakt, beweegt zich zoodanig dat één harer punten de genoemde vaste raaklijn doorloopt. Gevraagd de vergelijking van de bij deze beweging behoorende vaste poolbaan (= meetk. pl. van het oogenblikkelijk rotatie-centrum in het vaste vlak) ten opzichte van het coördinatenstelsel, gevormd door de vaste raaklijn en de horizontale middellijn van den cirkel.

Toegepaste Natuurkunde.

I. *Algemeene Cursus* B_1. (3 uren).

1. Aan een balk van 2 m. lengte met rechthoekige

doorsnede van 5 cm. breedte en 1 cm. hoogte, die aan de beide einden vast is ingeklemd, hangt in het midden een draad van 2 mm. diameter en 5 m. lengte.

Men vraagt hoever het ondereinde van den draad zal dalen, als daaraan een gewicht van 10 kg. wordt opgehangen.

De doorbuiging van een balk, die aan het eene einde bevestigd is en aan het andere belast wordt met een gewicht P bedraagt $\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}$, waarin $I = \frac{1}{12}a^3b$. De elasticiteitsmodulus voor den balk en voor den draad bedraagt 9×10^{11} C.G.S.-eenheden.

2. Men vraagt te bewijzen dat bij een adiabatische toestands-verandering van een ideaal gas de uitwendige arbeid kan worden voorgesteld door

$$\frac{1}{\varkappa - 1}(p_2v_2 - p_1v_1).$$

3. Men vraagt de belichtingssterkten in meterkaarsen van een vlak, dat door een Hefnerlamp, geplaatst in de normaal op het vlak op een afstand van 25 cm., verlicht wordt. Lichteenheid = 1 Hefnerkaars.

Hoe groot is de energiehoeveelheid, die in den vorm van licht door elken cm^2 van het vlak per sec. wordt ontvangen, als de energie der zichtbare stralen van een lichtbron van lichtsterkte 1 in het geheel 81000 ergen per seconden bedraagt?

Indien een andere lichtbron, geplaatst op 60 cm. afstand in een richting, die met de normaal een hoek van 40° maakt, een even groote lichtsterkte geeft, hoe groot is dan de lichtsterkte van deze lichtbron?

II. *Algemeene Cursus* B_2. (3 uren).

1. In een gesloten stroomketen EABCDE, stelt E den stroomgever voor; de weerstand van den keten tusschen A en B is r_1 ohm, die tusschen B en C is r_2 ohm, tusschen C en D r_3 ohm. De punten A en C zijn verbonden door een zijtak, waarvan de weerstand r_4 ohm bedraagt. Als nog gegeven is, dat de stroomsterkte in den hoofdketen i ampère bedraagt en de weerstand van den keten AED gelijk is aan R ohm, vraagt men te berekenen:

1°. het potentiaalverschil tusschen de punten B en D,

2°. de electromotorische kracht van den stroomgever E.

Te substitueeren: $r_1 = 16$ ohm, $r_2 = 20$ ohm, $r_3 = 10$ ohm, $r_4 = 4$ ohm, $R = 6{,}4$ ohm en $i = 1$ ampère.

2. Gegeven drie Leidsche flesschen a, b en c, die in alle opzichten aan elkaar gelijk zijn. De eerste (a) wordt geladen tot een potentiaal V. Door a en b vervolgens met elkaar in geleidend verband te brengen wordt de lading over deze twee flesschen verdeeld: daarna verdeelt men op dezelfde wijze de op a overblijvende lading over a en c. De drie flesschen worden ten slotte ieder afzonderlijk ontladen.

Vergelijk de energie, die daarbij vrij komt met de hoeveelheid, die zou verkregen zijn, als a in eens geheel was ontladen. Waarom is in het eene geval de vrijkomende energie kleiner dan in het andere?

Te substitueeren: $V = 100$ stat. G.G.S.-eenheden, het oppervlak van ieder der bladtinbekleedselen van een flesch $= 5024$ cm^2, de dikte van het glas $= 7$ mm. het specifiek induceerend vermogen $= 7$ en $\pi = 3{,}14$.

3. Beschouwt men de scheikundige omzetting bij de ontlading van een accumulator, dan is volgens THOMSEN de energie, die daarbij vrijkomt, berekent per gram lood, 420 gr.-cal. Onder welke onderstellingen kan men hieruit een waarde voor de electromotorische kracht van den accumulator berekenen en welke is die waarde, als nog gegeven is het electrochemische equivalent van zilver $= 1.118$ mg/amp. sec. het stoomgewicht van lood $= 207$. dat van zilver $= 108$, $E = 427$ kgm/kg.-cal, $g = 981{,}2$ cm/sec^2.?

III. *Bijzondere Onderwerpen* B_1, B_2 en B. (3 uren).

A.

1. Gegeven een glazen bakje van rechthoekigen vorm $a\,b\,c\,d$; de verticale zijwanden $a\,d$ en $b\,c$ bestaan uit planparallele glazen platen; ook is een dergelijke glazen plaat als tusschenschot aangebracht volgens de diagonaal $a\,c$, zoodat het bakje in twee wigvormige ruimten wordt verdeeld. In $a\,d\,c$ bevindt zich een vloeistof, waarvan de brekingsindex voor natriumlicht $= n$, in $a\,b\,c$ een vloeistof, waarvan de brekingsindex $= n\,(1 + p)$, (p is zeer klein ten opzichte van 1). De hoek tusschen de platen $d\,a$ en $a\,c$, evenzoo die tusschen $a\,c$ en $b\,c = \Phi$.

Een lichtstraal (natriumlicht) valt in loodrecht op $a\,d$, gevraagd wordt hoe groot de hoek van uittreding aan het vlak $b\,c$ zal zijn.

Gegeven is: $\Phi = 30°$, $n = 1{,}333$, $p = 0{,}01$.

2. Bij een bepaling van het molekulair gewicht van

L*i*C*l* volgens de methode der kookpuntsverhooging wordt als oplosmiddel water gebruikt. Men vindt voor de kookpuntsverhooging 1,110° C., wanneer 0,3266 gr. L*i*C*l* zijn opgelost in 7,23 gr. water. Men vraagt:

1°. welke waarde hieruit volgt voor het molekulair gewicht van L*i*C*l*, als de molekulaire kookpuntsverhooging van water (genomen ten opzichte van 100 gr.) = 5,2° C.,

2°. hoe groot de isotonische coëfficient voor deze oplossing is, als gegeven is het atoomgewicht van L*i* = 7,0 en van C*l* = 35,5.

B.

1. Wat verstaat men onder een gipsplaatje, dat „rood van de eerste orde" geeft? Wanneer gegeven is, dat de dikte van zulk een plaatje ongeveer 0,05 mM. bedraagt, welke golflengte bezit dan de lichtsoort, die geheel is uitgedoofd, als men het plaatje tusschen gekruiste nicols beziet? Het verschil der beide hoofdbrekingsindices $n_1 - n_2$ kan voor alle kleuren = 0,00978 worden gesteld.

Geef een enkele toepassing, van genoemd plaatje wordt gemaakt bij het optisch onderzoek van kristallen.

Hoe dik is de luchtlaag, die bij de ringen van NEWTON in teruggekaatst licht (als het licht loodrecht invalt) ook „rood van de eerste orde" te zien geeft?

2. Beschrijf en verklaar de optische inrichting en het gebruik van halfschaduw-polarimeter.

Art. 61. Civiel Ingenieur.

Theoretische Mechanica. (3 uren.)

1. Een stoffelijk punt bevindt zich in een rechte buis, die in een horizontaal vlak eenparig wordt rondgewenteld om een verticale as, welke haar op een afstand δ kruist.

Welke beweging zal dit punt in de buis aannemen, als het op zeker oogenblik in volstrekte rust is en wel in het voetpunt van de gemeenschappelijke loodlijn van as en buis?

Welke drukking zal de buis gedurende de beweging tegen het punt uitoefenen?

2. Een homogene staaf (massa m, lengte l, breedte en dikte ten opzichte van de lengte te verwaarloozen, kan vrij wentelen in een horizontaal vlak om een as, die door een harer uiteinden gaat.

Op het andere uiteinde werkt een kracht, die voortdurend gericht is naar een vast punt van het vlak, en op een afstand l van de as gelegen. De grootte van de kracht is $m\ u^2$

maal den afstand tusschen het uiteinde en het vaste punt.

Wordt gevraagd:

1°. den slingertijd te bepalen van de kleine schommelingen, die de staaf om haren evenwichtsstand kan volbrengen.

2°. Te onderzoeken, hoe het van de hoeksnelheid ω, waarmede de staaf ondersteld wordt door haren evenwichtsstand te gaan, afhangt, of zij volle wentelingen dan wel slingeringen zal maken.

3. Een lichaam P met de massa m wordt met een plat grensvlak op een hellend vlak geplaatst (hellingshoek $= \alpha$).

Dit hellend vlak is een zijvlak van een tweede lichaam Q met de massa M, dat met een plat grensvlak op een horizontaal vlak rust.

Het verticale vlak door de zwaartepunten der beide lichamen snijdt het hellend vlak volgens een lijn van de grootste helling.

Het lichaam P zal ten gevolge van zijn gewicht langs 't hellend vlak glijden, terwijl het lichaam Q ten gevolge van den wederzijdschen druk tusschen P en Q over 't horizontale vlak zal schuiven, als er geen wrijving is; wat ondersteld wordt.

Wordt gevraagd de beweging van elk der lichamen te bepalen.

Toegepaste Mechanica. (3 uren.)

1. Wat is absolute, wat is oorsprongs-, wat is trillingsvastheid? Wat beteekent ideale hoofdspanning? Hoe groot is de ideale hoofdspanning in een punt P van een rechthoekige doorsnede ($b \times h$), wanneer die doorsnede wordt aangesproken op buiging (buigend moment Va, werkend in het vertikale vlak van symmetrie) en afschuiving (afschuivende kracht V, werkend volgens de vertikale as van symme rie). Het punt P ligt op $^1/_4$ der hoogte in het getrokken gedeelte der doorsnede.

2. Wat is bij een vakwerkligger, die aan de uiteinden is opgelegd, het neutrale punt van een veld? Op welke wijze bepaalt men bij een parallelligger met vertikalen en diagonalen de maximum spanning in een diagonaal, en in een vertikaal, als de bovenrand belast wordt. De belasting is gelijkmatig.

3. Twee gelijke prismatische balken, lengte L, doorsnede F, traagheidsmoment der doorsnede I, elasticiteits-modulus E, zijn boven elkaar aan de uiteinden opgelegd op een vertikalen afstand l. De balken zijn in het midden verbonden

door een koord (doorsnede f, elast. mod. e). De onderste balk is gelijkmatig belast (q). Wat is de spanning in het koord? Wat zijn de doorzakkingen der middens van de balken? Afschuiving mag verwaarloosd worden. De uitkomsten volgens een andere dan de gevolgde methode te controleeren.

Graphostatica. (3 uren.)

4. Gevraagd voor een prismatische balk, opgelegd op drie even hooge steunpunten die op gelijke afstanden l liggen, de invloedslijn voor het moment M in het middelste steunpunt, en wel

1°. die waarbij de ordinaat voorstelt de kracht $\frac{M}{l}$.

2°. die, waarbij van de stelling van MAXWELL wordt uitgegaan.

Beide invloedslijnen te teekenen op dezelfde momentenschaal.

N.B. Bij een afstand u van de kracht tot het uiteinde van de balk, is

$$M = -\frac{Pu(l^2 - u^2)}{4\,l^2}.$$

Landmeten en Waterpassen. (3 uren.)

1. Bij constante temperatuur van 15° werd de lengte van een stalen meetband (doorsnede 13 × 0,2 mM.) onder verschillende spanningen bepaald.

Voor de lengte werd gevonden:

Bij spanning van	30 K.G. :	20,04104 Meter.
„	25	20,03934
„	20	20,03736
„	15	20,03562
„	10	20,03360

Gevraagd: de meest waarschijnlijke waarden voor de lengte van dien band bij 15° zonder spanning en voor de verlenging van den band per K.G. spanning.

2. In een punt T meet men met een theodoliet met centrischen kijker den horizontalen hoek tusschen de richtingen T A en T B.

De lijn T A is horizontaal; de lijn T B heeft een elevatie van 36° 52′.

Onder doorslaan van den kijker, doch overigens onveranderde opstelling van het instrument, en juisten stand van de 1e as verkrijgt men de volgende aflezingen:

Kijkerstand.	Voorwerp	Nonius I.	Nonius II.
I	A	119° 27′ 45″	299° 28′ 15″
I	B	156 39 50	336 40 0
Doorge- II	B	336 40 15	156 40 5
slagen. II	A	299 28 50	119 28 30

Wanneer de waarnemingsfouten verwaarloosd worden, welke zijn dan de fouten in de regelingen van de 2e as en van vizierlijn van den theodoliet, die uit de waarnemingen volgen?

3. De ketting van secundaire driehoeken volgens een gegeven figuur moet aansluiten aan de twee onderling onzichtbare punten A en B van een primair driehoeksnet.

De rechthoekige coördinaten van A en B zijn gegeven.

Met den gebogen vorm van het aardoppervlak behoeft geen rekening gehouden te worden.

Welke metingen worden in het secundaire net gedaan en welke berekeningen zijn er noodig om de rechthoekige coördinaten der nieuwe punten te vinden.

Art. 62. Bouwkundig Ingenieur.

Theoretische Mechanica.

Dezelfde vragen als in art. 60, (1ste gedeelte, B_1).

Toegepaste Mechanica. (3 uren).

1. Twee vierkante balken, zijde der doorsnede a, worden eerst naast elkaar, daarna los boven elkaar, en daarna boven elkaar gelegd, zoodanig met elkaar verbonden, dat ze als één geheel mogen beschouwd worden. Steeds zijn ze aan de uiteinden vrij opgelegd en gelijkmatig belast. Wat is het draagvermogen in de verschillende gevallen, in verhouding tot dat van één der balken. En wat is het draagvermogen van één balk, als die zoodanig gelegd wordt, dat een der diagonalen horizontaal is?

2. Hoe kan men volgens de methode Ritter de spanningen in de staven van een Polonceau-kap uitrekenen. Toe te passen op een op schaal te teekenen voorbeeld.

Art. 63. Scheepsbouwkundig Ingenieur.

Theoretische Mechanica.

Dezelfde vragen als voor art. 61.

Toegepaste Mechanica. (3 uren.)

1. Wat is absolute, wat is oorsprongs-, wat is trillingsvastheid? Wat beteekent het ideaal buigend moment en hoe wordt het berekend?

2. Op een as is bevestigd een riemschijf, waarop een wringend moment M werkt. Dit moment wordt in evenwicht gehouden door een evengroot moment, dat aangrijpt op het midden van een trommel, die aan de beide eindvlakken eveneens op de as is vastgemaakt. De eindvlakken van den trommel worden als volkomen stijf beschouwd.

Gevraagd wordt het wringend moment, dat werkt op de as tusschen de eindvlakken van den trommel. Het polaire traagheidsmoment van de normale doorsnede van de as is i_p, van den trommel I_p. De glijdingsmodulus voor het materiaal van de as is g, voor dat van den trommel G.

3. Twee gelijke prismatische balken, lengte L, doorsnede F. traagheidsmoment der doorsnede I, elasticiteitsmodulus E, zijn boven elkaar aan de uiteinden opgelegd op een vertikalen afstand l. De balken zijn in het midden verbonden door een koord (doorsnede f, elast. mod. e). De onderste balk is gelijkmatig belast (q). Wat is de spanning in het koord? Wat zijn de doorzakkingen der middens van de balken? Afschuiving mag verwaarloosd worden. De uitkomsten volgens een andere dan de gevolgde methode te controleeren.

4. *Graphostatica.* Dezelfde vraag als voor art. 61.

Art. 64. Werktuigkundig Ingenieur.

Theoretische Mechanica. (3 uren).

Dezelfde vragen als voor art. 61.

Toegepaste Mechanica.

Dezelfde vragen als voor art. 63.

Art. 65. Mijnen-Ingenieur.

Theoretische Mechanica. (3 uren).

Dezelfde vragen als voor art. 61.

Toegepaste Mechanica.

Dezelfde vragen als voor art. 63.

Landmeten en Waterpassen.

Dezelfde vragen als voor art. 61.

Eind-examen der Heegere Burgerscholen.

Algebra (3 uren).

1. Bereken x en y uit:

$$3^{2x-y+2} + 3^{y-2x-1} = 4 \text{ en } (3x - y)(x + y - 7) = 4x + 4y - 28.$$

2. Van eene meetkundige en eene rekenkundige reeks, ieder van 6 termen, zijn de eerste termen gelijk. De tweede termen zijn ook gelijk. De derde term van de meetkundige reeks is gelijk aan den vijfden term van de rekenkundige. De laatste term der meetkundige reeks is 464 grooter dan de laatste term der rekenkundige.

Bereken de som der termen van elke der reeksen.

3. Op eene gemeente rust de voortdurende verplichting jaarlijks, te beginnen met 1 Januari 1906, acht duizend gulden te betalen. De gemeente wil die schuld afdoen door op 1 Januari 1906, 1 Januari 1907 enz. twintig duizend gulden te betalen. Wanneer zal de schuld gedelgd zijn en hoeveel bedraagt de laatste aflossing? Rentevoet 4 %.

Meetkunde (3 uren).

1. Construeer een gelijkzijdigen driehoek, waarvan het oppervlak gelijk is aan $^1/_5$ van dat van een regelmatigen tienhoek, beschreven in een cirkel, die een straal van R centimeter heeft, en druk de zijde van dien driehoek uit in den gegeven straal.

2. In een regelmatig viervlak is een bol beschreven. Het hoeveelste gedeelte van dit boloppervlak ziet men uit een der hoekpunten van dat viervlak?

3. Gegeven een regelmatig achtvlak.

In elk hoekpunt wordt van het lichaam een stuk afgesneden door een vlak, gaande door de middenpunten van de vier ribben, die in het hoekpunt samenkomen.

Gevraagd: oppervlak en inhoud van het overblijvende lichaam uit te drukken in de ribbe a van het regelmatig achtvlak en te onderzoeken, of om en in dat lichaam een bol kan worden beschreven.

Goniometrie en Trigonometrie (3 uren).

1. Bereken x uit de vergelijking:

$$(2 + 3 \cos 2x) \sin 3x - \sin x = 0.$$

2. Toon aan:

$$\left\{\frac{\sin(270^\circ - a)\,\mathrm{tg}\,(90^\circ + a)}{\cos(a - 180^\circ)\cot(360^\circ - a)} - \frac{\mathrm{tg}\,(-a)}{\cot(180^\circ + a)}\right\}$$
$$\left\{\frac{\mathrm{tg}\,(225^\circ - a)}{\cot(225^\circ + a)} + \frac{\sin(a + 180^\circ)}{\sec(90^\circ - a)}\right\} = 1.$$

3. Van een trapezium ABCD is de oppervlakte 800,13 vierkante meter, de langste evenwijdige zijde AD = 41,56 meter, de diagonaal AC = 40,98 meter, en hoek DAC = 36°11′19″.

Bereken de opstaande zijde AB.

Beschrijvende Meetkunde (3 uren).

1. Gegeven een vlak en een punt buiten dat vlak. Gevraagd wordt: door dat punt eene lijn te trekken, die de beide doorgangen van het vlak onder gelijke hoeken kruist.

2. Gegeven eene lijn *l* en twee punten *a* en *b* buiten die lijn. Men vraagt de projectiën te bepalen van den gelijkbeenigen driehoek, die de lijn *ab* tot basis en een punt van de lijn *l* tot top heeft.

3. Van eene regelmatige vierzijdige piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, zijn de beide projectiën gegeven en wel zóó, dat geene der ribben van het grondvlak evenwijdig aan de as van projectie loopt. Gevraagd wordt te construeeren:

a. den hoek, dien een opstaand zijvlak maakt met het grondvlak;

b. den hoek, gevormd door twee opstaande zijvlakken.

Werktuigkunde (3 uren).

1. Een rechte cilinder, die G gram weegt, ligt op een hellend vlak en steunt tegen een vast verticaal vlak zóó, dat de as van den cilinder evenwijdig is aan de horizontale snijlijn S dier vlakken, De straal van het grondvlak van den cilinder is R centimeter. Het hellend vlak is draaibaar om de lijn S en wordt in zijn evenwichtsstand, waarbij de hoek met den horizont α^0 is, gehouden door een *horizontaal* gespannen koord, waarvan de lengte *l* centimeter bedraagt. Dit koord, dat een punt van het hellend vlak met een punt van het verticale vlak verbindt, bevindt zich in het standvlak, door het zwaartepunt van den cilinder gebracht op de lijn S, zoodat het koord deze lijn en dus ook de as van den cilinder rechthoekig kruist. Hoe

groot is de spanning in het koord? Het gewicht van het hellend vlak en de wrijvingsweerstand worden buiten rekening gelaten.

2. Een lichaam, dat een gewicht heeft van 500 kilogram, beweegt zich met eenparige beweging over een horizontaal vlak. Hoe groot is de kleinste kracht, die het lichaam in eenparige beweging houdt, en hoe groot is de hoek, dien deze kracht met het horizontale vlak maakt, als de wrijvingscoefficient $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ is?

Verder wordt gevraagd: Indien in dezelfde richting eene kracht van de dubbele grootte gedurende 10 seconden op het lichaam werkt, als de aanvangssnelheid nul is:

a. Hoe groot is het arbeidsvermogen van beweging, dat het lichaam dan heeft verkregen?

b. Hoe groot is de weg, dien het in die 10 seconden heeft afgelegd?

c. Hoe groot is de weg, dien het na die 10 seconden nog zal afleggen, als de kracht op dat oogenblik ophoudt te werken?

De versnelling der zwaartekracht wordt gelijk 10 meter gesteld.

3. Te behandelen één der twee volgende onderwerpen, ter keuze van den candidaat:

a. De formule af te leiden voor de bepaling van het zwaartepunt van eene afgeknotte piramide.

b. De formule af te leiden voor het evenwicht van een den candidaat bekend takeltuig met inachtneming der wrijving.

Natuurkunde (met 3 opstellen, 4 uren).

Het eene uiteinde van eene rechte, horizontaal geplaatste, overal evenwijde buis, waarvan de inwendige doorsnede 0,2 vierkante centimeter bedraagt, staat in gemeenschap met een ballon, waar binnen zich een platina-spiraal bevindt, welker uiteinden luchtdicht door het glas van den ballon gestoken zijn; het andere einde der buis is open. Een kwikzuiltje van de buis sluit 380 kubieke centimeters droge lucht van 27° C. van de buitenlucht af.

Door den draad gaat gedurende $3^1/_2$ minuut een electrische stroom van 0.5 ampère; dit veroorzaakt een verplaatsing van het kwikzuiltje over 47.5 centimeter lengte. Bovendien is bekend, dat bij deze proef 0.775 gramcaloriën ontwikkeld worden.

Verder is gegeven:

de barometerstand is gedurende de proef steeds 750 millimeter;

het gewicht van een liter lucht bij 0° C. en 760 millimeter drukking is 1.28 gram;

de uitzettingscoëfficiënt van lucht is $\frac{1}{273}$;

1 gramcalorie is gelijkwaardig met 42×10^6 ergen;

1 Watt of 1 Volt-ampère is 10^7 ergen.

Men vraagt:

a. tot welke temperatuur is de droge lucht verwarmd?

b. hoeveel bedraagt de soortelijke warmte der droge lucht bij standvastige drukking?

c. hoeveel Ohms bedraagt de weerstand van het gedeelte van de spiraal dat zich binnen den ballon bevindt?

Verondersteld wordt, dat alle in den draad ontwikkelde warmte alleen dient tot verwarming van de lucht.

Rechtlijnig teekenen.

Van een bankje was een scheeve projectie met maten gegeven.

Gevraagd werd de projecties te teekenen, wanneer het gedacht werd te staan op het horizontale vlak.

Examen voor Aspirant-Landmeter.

Rekenkunde ($1^1/_2$ uur).

1. Bewijs, dat ieder getal, dat een tweedemacht en waarvan het cijfer der eenheden 6 is, een oneven cijfer op de plaats der tientallen heeft.

2. Een koopman ontvangt koffie van f 1,20 de K.G., contant te betalen. Hij doet ze terstond over voor f 1,40 de K.G., de helft te betalen over 6 maanden en een derde gedeelte over 9 maanden. Als hij in 't geheel 25 pct 's jaars wil winnen, wanneer moet dan de rest betaald worden?

3. Drie personen kunnen samen zeker werk verrichten in $^1/_9$ dag. Begint C eerst mee te werken, nadat A en B de helft gedaan hebben, dan duurt het werk $1^7/_{22}$ maal zoolang. Als gij weet, dat A in 10 dagen evenveel verricht als B in 12 dagen, bereken dan in hoeveel dagen ieder het werk alleen kan afmaken.

4. Twee vaten samen groot 2,6 H L. zijn gevuld met wijn; in het kleinste vat is voor f 72 en in het grootste voor f 98. Vult men het kleinste vat met de wijnsoort

uit het grootste en dit met de wijnsoort als in het kleinste was, dan is er in beide vaten voor evenveel geld aan wijn. Hoe groot is ieder vat?

5. Bereken tot op $^1/_{100}$ nauwkeurig:

$$12\sqrt{3} + 5\sqrt{2}.$$

Stelkunde ($1^1/_2$ uur).

1. Bereken de waarden van x en y, die voldoen aan de vergelijkingen:

$$(2x + y)^{\frac{1}{2}} (y - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}},$$

$$(y - 1)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sqrt{2x + y}.$$

2. Van de vierkantsvergelijking:

$$x^2 - 2(a + 1)x + \tfrac{4}{3}a^2 = 0$$

is één der wortels driemaal zoo groot als de andere. Bereken die wortels en a.

3. Bereken x uit de vergelijking:

$$\frac{\log \frac{2}{3^3} + \frac{\log x}{\log \frac{1}{9}} - \log 32^{\frac{1}{7}}}{2 \log \frac{3^2}{25} + \log 625 + 4} = -\frac{1}{4}.$$

Het grondtal van het logarithmenstelsel is 3.

4. Eene rekenkundige reeks bestaat uit 36 termen. Van eene tweede rekenkundige reeks is het aantal termen 12, terwijl de eerste en de laatste term dier tweede reeks achtereenvolgens de helft zijn van de eerste en de laatste term der eerste reeks. Hoeveel termen moet men in elk dier reeksen tusschen twee op elkander volgende interpoleeren, opdat de sommen der beide nieuwe rekenkundige reeksen even groot zijn.

Meetkunde ($1^1/_2$ uur).

1. In $\triangle$ ABC is AD de hoogtelijn op de basis, AE de lijn, welke $\angle$ A halveert, BF en CG zijn de loodlijnen, uit de uiteinden van de basis op AE of haar verlengde neergelaten. Men vraagt te bewijzen:

1°. dat het midden M van BC met de punten D, F en G op één cirkelomtrek ligt.

2°. dat het oppervlak van $\triangle$ ABC gelijk is aan dat van

een rechthoek, die BF en AG of CG en AF tot opeenvolgende zijden heeft.

2. Van eene regelmatige afgeknotte 4-zijdige piramide is de hoogte h gegeven. De opstaande zijvlakken maken hoeken van 45° met het grondvlak, terwijl het grondvlak 9 maal zoo groot is als het bovenvlak. Gevraagd den straal van den omgeschreven bol van deze afgeknotte pyramide te berekenen.

Vlakke en Bol-driehoeksmeting (3 uren).

1. Bereken de waarden van x en y uit de vergelijkingen:

$$\sin x + \sin y = 1{,}5,$$
$$\cos x + \cos y = 0{,}5.$$

2. In driehoek ABC is AD de lijn, die den hoek A in twee gelijke deelen verdeelt, D het snijpunt dier lijn met BC. Wanneer gegeven is de hoek A, $BD = p$ en $DC = q$, vraagt men de onbekende elementen van den driehoek te berekenen. De formules moeten geschikt zijn voor de berekening met logarithmen.

3. Van den boldriehoek ABC is gegeven:

$$a = 54° \, 18' \, 25'', \quad b = 69° \, 13' \, 15'', \quad c = 48° \, 12' \, 10''.$$

Bereken den spherischen straal van den in dezen driehoek beschreven cirkel en den spherischen afstand van het middelpunt van dien cirkel tot het hoekpunt C.

4. Van den boldriehoek ABC is gegeven $C = A + B$. Bewijs:

$$\cos^2 \frac{c}{2} = \cot A . \cot B.$$

$$\cos C = - \operatorname{Tg} \frac{a}{2} \operatorname{Tg} \frac{b}{2}.$$

Natuurkunde (1 uur).

1. Gevraagd de inrichting van den Hollandschen verrekijker met behulp van eene duidelijke teekening op te helderen.

2. Van de beide concave spiegels van een telescoop van Gregory heeft de groote een brandspuntafstand $f_1 = 56$ c.M., de kleine $f_2 = 6{,}3$ c.M., de brandspuntsafstand van het oogglas $f_3 = 3$ c.M. Het door de beide spiegels gevormde beeld eener planeet valt in de centrale opening van den grooten spiegel.

a) Hoe groot is de onderlinge afstand der beide spiegels?
b) Hoeveel bedraagt de vergrooting?
Afstand van duidelijk zien = 24 c.M.

Toelatingsexamen tot de Veearts enijschool te Utrecht.

Rekenen.

I. Iemand heeft drie kapitalen, samen groot f 18.000 uitgezet resp. tegen 4 $4^1/_2$ en $4^3/_4$ $^0/_0$'s jaars, zoodat hij gemiddeld $4^4/_9$ $^0/_0$ trekt. Als de eerste twee kapitalen zich verhouden als 3 : 2, hoe groot is dan elk kapitaal?

II. A en B gaan elkaar tegelijk tegemoet uit M. en N. Na de ontmoeting die na 4 uur plaats heeft, heeft B nog $5^1/_3$ uur noodig om M. te bereiken. Hoe lang moet A na de ontmoeting nog loopen om te N. te komen.

III. Van een evenredigheid is de som van alle termen $2852^2/_3$. De som van de voorgaande termen is $713^1/_6$, en die van de termen der 1e reden 1150. Welke is die evenredigheid. Op te lossen zonder de hoofdeigenschap te gebruiken.

Stelkunde.

I. Bepaal x uit:

$$(x+1)\ (x+3)\ (x+5)\ (x+7) = 1920.$$

II. Bepaal x, y en z uit:

$$\frac{10^{\log.\,(2x+3y-z)^2}}{2x+3y-z} = 5.$$

$$\frac{a^{3x-y}}{\sqrt{a^{4y-2z}}} = {}^{3x-z}$$

$$5^{2\,(2x+y+z)} - 6 \times 5^{2x+y+z} - 475 = 0.$$

III. A bezat, toen hij 23 jaar was, een kapitaal van f 6000, dat 4 $^0/_0$ rente gaf. Hij aanvaardt op dat tijdstip eene betrekklng, die hem per jaar *f* 2500 oplevert. Jaarlijks heeft hij *f* 1600 voor onderhoud noodig. Zijn overgelegd geld voegt hij bij zijn kapitaal. Hoeveel zal hij bezitten op 35-jarigen leeftijd?

Planimetrie.

I. In twee elkaar snijdende cirkels is de gemeenschappelijke koorde bij den eenen de zijde van den tienhoek, bij den anderen de zijde van den twaalfhoek. De koorde is

1 d.M. lang. Bereken de grootte van het gemeenschappelijk oppervlak.

II. Een gelijkbeenige driehoek heeft een tophoek van 36°. Hij wordt door een uit het toppunt beschreven cirkelboog in twee gelijke deelen verdeeld. Bereken den straal als de opstaande zijde a c.M. is.

III. Verdeel het oppervlak van den ring tusschen twee concentrische cirkels door een derden concentrischen cirkel in twee gelijke deelen.

Stereometrie.

I. Van een regelmatige vierzijdige pyramide is de zijde van het grondvlak $5\sqrt{2}$ M. en een opstaande ribbe 13 M. Wanneer twee vlakken evenwijdig aan het grondvlak de hoogte in drie gelijke deelen verdeelen, bereken dan inhoud en oppervlak van het middelste stuk.

II. Van een kubus worden de punten afgesneden door vlakken, die door de middens der ribben gaan. Bereken den inhoud van het overblijvende lichaam, als de ribbe van den kubus a M. is.

III. Van een rechten kegel en een rechten cylinder, die gelijke hoogte hebben, vallen de middelpunten der grondvlakken samen, terwijl het grondvlak van den kegel tweemaal zoo groot is als dat van den cylinder. Bereken den inhoud van het deel van den kegel buiten den cylinder (hoogte en straal van den cylinder h en r).

Trigonometrie.

I. Bepaal x en y uit:

$$(\sin a + \cos a)\ (x \sin b + y \cos b) = \sin 2a + 1$$

en

$$x\, tg\, b = y\, tg\, a.$$

II. Van een driehoek is de basis 5,876 en het verschil der opstaande zijden 2,456, terwijl het verschil der hoeken aan den basis 36° 18′ 24″ is. Bereken de overige elementen.

III. Van een driehoek zijn de zijden $2\sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$ en $3\sqrt{2}$. Bereken de hoeken zonder gebruik te maken van log.

IV. Van driehoek ABC is hoek A 58° 16′ 32″ en de stukken, waarin de loodlijn uit A de overstaande zijde verdeelt 2,568 en 4,763 c.M. In welke deelen wordt hoek A door de loodlijn verdeeld.

Natuurkunde.

1. Een kolfje is omgekeerd en met een kurk gesloten. Het water staat boven de kurk 8 c.M. hoog en daarboven

bevindt zich waterdamp van 20 m.M. spanning. Met hoe groote kracht wordt de kurk in den hals gedrukt, wanneer de barometer 75 c.M. aanwijst, en de oppervlakte der opening 6 c.M^2. bedraagt.

2. Twee lenzen zijn achter elkander geplaatst en hebben elk een brandpuntsafstand van 10 c.M. De eerste is convergeerend, de tweede divergeerend. Van een voorwerp dat 30 c.M. voor de eerste geplaatst is, krijgt men een beeld, dat 90 c.M. achter de tweede staat. Men vraagt hun onderlingen afstand en de vergrooting. De dikte der lenzen mag verwaarloosd worden.

Vergelijkend Examen voor Adsp. Ingr. voor het Stoomwezen.

Toegepaste Mechanica.

1. Binnen een koperen buis is een ijzeren stang, die met de beide einden aan de buis is bevestigd. Bij een temperatuur van t° is dit samenstel zonder spanning. Hoe groot zal deze zijn in de beide deelen, als temperatuur T° wordt verhoogd?

De doorsnede, elestic. moduli en uitzett. coëff. zijn respectievelijk F_k, E_k, α_k en F_y, E_y, α_y.

2. Een dunwandige cylindrische ketel ligt op een horizontaal vlak en is voor de helft met een zware vloeistof gevuld. Men vraagt den gang der berekening aan te geven voor de normale spanning, die door het gewicht der vloeistof zal ontstaan in de onderste lengte-doorsnede van den ketel, en voor zoover de tijd toelaat deze berekening uit te voeren. Daarbij alleen lettende op de buiging.

Theoretische Mechanica.

1. Een stoffelijk punt wordt met een snelheid v_0 verticaal naar boven geworpen. Behalve zijn gewicht werkt op het punt de weerstand van de lucht, die aangenomen wordt evenredig te zijn met de snelheid van het punt.

Wordt gevraagd: de snelheid en de plaats van het punt ten tijde t van de beweging.

2. Een lichaam kan vrij om een horizontale as bewegen. De afstand van zijn zwaartepunt tot die as is gelijk a. Behalve de zwaartekracht werkt er op elk massadeeltje van dit lichaam een kracht gericht naar een vast punt en evenredig zoowel met de massa van dat deeltje als met den afstand tot dat vaste punt. Dit vaste punt ligt op de loodlijn uit het zwaartepunt van 't lichaam, als dit in den

evenwichtsstand is, op de as neergelaten, en wel op een afstand d van de as en onder de as.

Als dit lichaam met een hoeksnelheid ω door zijn evenwichtsstands gaat vraag men:

1°. te bepalen, hoe het van die hoeksnelheid zal afhangen, of het lichaam volle wentelingen dan wel slingeringen zal volbrengen;

2°. voor het geval, dat het lichaam nòch de eerste nòch de tweede beweging aanneemt, zijn stand te bepalen voor een willekeurig oogenblik van de beweging.

(Tijd voor toeg. en theor. mech. samen 3 uren.)

Natuurkunde (2 uren).

1. Een metalen cylinder van 2 M³. inhoud bevat bij 99°.1 C. een hoeveelheid water en waterdamp gezamenlijk 10 K.G. wegende. Men brengt de temperatuur van den cylinder met zijn inhoud op 160°5 C.

Gevraagd: 1o. hoeveel water daarbij verdampt, en 2o. hoeveel warmte voor die temperatuur-verhooging moet worden toegevoegd.

De uitzetting van den cylinder kan buiten rekening blijven. Verder is gegeven, dat bij 99°.1 C. het volume van 1 K.G. verzadigden waterdamp = 1.702 M³. de verdampingswarmte = 537.1 calorieën, de spanning van den verzadigden damp = 1 K.G./c.M. is, terwijl bij 160°5 C. deze zelfde grootheden respectievelijk zijn 0.2975 M³, 493.2 calorieën en 6.4 K.G./c.M².

Het mechanisch aequivalent van 1 K.G. cal. = 427 K.G. M. De soortelijke warmte en het soortelijk gewicht van water bij alle temperaturen = 1 te stellen.

2. Voor een ideaal gas vraagt men lijnen van gelijk volume, gelijken druk, gelijke temperatuur en gelijke entropie graphisch voor te stellen, zoowel in een volume-druk- als in een entropie-temperatuur-diagram, en voorat de vergelijkingen dezer lijnen, voor zooveel noodig, af te leiden.

Examen Waterstaat.

Theoretische Mechanica.

1. Een stoffelijk punt wordt onder een hoek α met den horizon en met een snelheid c weggeworpen.

Behalve het gewicht werkt op het punt een weerstand, van de lucht, die evenredig is met de snelheid.

Bewijs, dat de baan een verticale asymptoot heeft.

2. Een cirkelvormige holle buis, straal r, diameter holte oneindig klein, wentelt eenparig met de hoeksnelheid ω om een raaklijn aan de buis als as.

Een stoffelijk punt bevindt zich op zeker oogenblik in het punt der buis, diametraal over het raakpunt van as en buis, en heeft daar een relatieve snelheid t/o van de buis $= 2r\omega$.

Bepaal de relatieve beweging van het punt t/o van de buis. Op het punt werkt geen kracht van buiten, ook niet zijn gewicht.

3. Een lichaam kan vrij wentelen om een horizontale as.

Op elk massadeeltje van 't lichaam werkt behalve zijn gewicht nog een kracht, gericht naar een vast centrum, en evenredig zoowel met de massa van dit deeltje als met zijn afstand tot dit centrum.

Dit centrum ligt in de loodlijn uit het zwaartepunt van 't lichaam in zijn evenwichtsstand op de as neergelaten en met het zwp. aan denzelfden kant van de as. Afstand zwp. tot de as $= a$, die van 't centrum tot de as $= \delta$.

Als dit lichaam met een hoeksnelheid ω door zijn evenwichtsstand gaat, wordt gevraagd, hoe het van de grootte van ω zal afhangen, of het lichaam volle wentelingen dan wel slingeringen zal volbrengen.

Verder de beweging volledig te bepalen, als 't lichaam nòch volle wentelingen, nòch slingeringen volbrengt.

Toegepaste Mechanica.

1. Een houten balk, breed 0.24 M., hoog 0,24 M. en lang 8.00 M., is in de uiteinden en in het midden ondersteund. De steunpunten worden gevormd door het midden van 3 drijvende rechthoekige bakken, elk een horizontale doorsnede van 15 M^2. inhoud hebbende. In ontlasten toestand liggen de steunpunten even hoog. Hoe groot zal de druk op elk der bakken zijn, wanneer de balk met 2400 K.G. gelijkmatig wordt belast en hoeveel bedraagt de maximum spanning in den balk? (Elasticiteitsmodules van hout is 120.000 KG. per cM^2.)

2. Een cirkelvormige ring van constante cirkelvormige doorsnede wordt eenmaal door 2 gelijke tegengestelde krachten P, aangrijpende in de uiteinden eener middellijn, een andermaal door 4 krachten P, twee aan twee tegengesteld en aangrijpende in de uiteinden van 2 onderling loodrechte middellijnen. Hoe verhouden zich de grootste spanningen

in beide gevallen, zoo de straal van den ring 10-maal zoo groot is als die van de doorsnede en de invloeden van normale en afschuivende krachten bij de vormverandering mogen verwaarloosd worden?

3. Een vakwerkligger van 32 M. spanwijdte en in de uiteinden opgelegd, heeft een rechten onderrand en een veelhoekigen bovenrand en is door verticalen in velden van 4 M. wijdte verdeeld. Van het veld. dat op respectielijk 8 M. en 20 M. van het linker- en het rechtereinde verwijderd is, is de linkerverticaal 3 M., de rechter 4 M. lang terwijl in dat veld eene naar rechts vallende diagonaal aanwezig is. Bepaal de grootste en de kleinste spankracht in deze diagonaal, wanneer de ligger met eene gelijkmatig verdeelde permanente belasting van 1 ton en eene mobiele belasting van 2 ton per strekkenden Meter in de knooppunten van den onderrand indirect (door tusschenkomst van dwars- en langsliggers) wordt belast.

Akte-examens (M. O.) M¹.

Perspectief. Groep I.

Bepaal de perspectief van een omwentelingslichaam in den vorm van een tol en bestaande uit een cilinder, een deel van een bol en een omhullingskegel van den bol, volgens afmetingen in een schets aangeduid.

Het lichaam ligt met een beschrijvende lijn van den kegel op den grond.

Bepaal tevens de eigen schaduw bij zonlicht in een gegeven stand.

Groep II.

Bepaal de perspectief van een trechter van gegeven vorm en afmetingen met eigen schaduw bij kunstlicht (schaduw op en in den trechter).

Het lichaam heeft een gegeven ligging op den grond.

Groep III.

Bepaal de perspectief van een steenen bekken van gegeven vorm en afmetingen met eigen schaduw en slagschaduw op den grond.

Groep IV.

Bepaal de perspectief van een ronde zuil van gegeven vorm en afmetingen, alsmede de eigen schaduw bij zonlicht.

M^II^.

Perspectief.

Bepaal de perspectief van een trechter, bestaande uit een deel van een halven bol en een cilinder van gegeven afmetingen.

Het lichaam ligt op den grond in gegeven stand.

Construeer tevens de eigen schaduw (op en in den trechter) bij zonlicht.

Projectieleer.

1. Een reg. 6-z. piramide ABCDEF T, waarvan de zijde van 't grondvlak 6 en de hoogte 15 cM. is, staat met het grondvlak ABCDEF op het hor. proj.vl. en wel zoodanig, dat ED met het vert. vlak een hoek van 15° maakt (opening naar rechts).

De letters bij de hoekpunten van 't grondvlak staan in alphabetische volgorde. E het dichtst bij 't vert. vlak.

Na de piramide in zijn geheel te hebben geprojecteerd (hor. en vert. proj.) neme men in de opstaande ribben AT, BT en CT, respectievelijk punten Q, R en S, aan en wel zóó, dat AQ = 8, BR = 6 en CS = 7 cM. is.

De piramide wordt gesneden door een plat vlak, hetwelk door de punten Q, R en S gaat, en daarna gewenteld om de ribbe EF, tot ze met een opstaand zijvlak EFT op het horizontale projectievlak komt te liggen.

Bepaal de 1^e^ en 2^e^ proj. van de afgeknotte piramide in den laatsten stand.

As van proj. 32 cM. van den onderkant, de hor. proj. van den top 16 cM. onder de as en 25 van den linkerkant der teekening.

2. De hor. doorgang van een vlak maakt met de as een hoek van 30°, de vertikale een hoek van 45° (opening naar links). Het punt, waar deze doorgangen de as snijden zoo ver mogelijk naar rechts, de as midden op 't papier te nemen. Een punt in de ruimte heeft zijn hor. proj. in genoemden hor. doorgang 8 cM. onder de as, terwijl de vert. proj. van dat punt 12 cM. boven de as ligt.

Bedoeld punt is de top van een rechten cirkelkegel, welks grondvlak in het aangenomen vlak ligt, terwijl de straal van 't grondvlak 4 cM. is.

Construeer:

a. Horizontale en vert. proj. van den kegel.

b. Den doorgang van den kegel met het vert. proj. vlak.

Beschrijvende Meetkunde.

In het horizontale vlak ligt (vóór het verticale) een cirkel, rakende aan de as van projectie (middelpunt M, straal 12 cM.). Door M trekt men den straal MA′, die met de as van projectie een hoek van 45° maakt (opening naar rechts). A′ ligt verder van de as dan M.

Uit M is op MA′ de afstand MB = 10 cM. uitgezet; B ligt tusschen M en A′. Op MB als middellijn beschrijft men een tweeden cirkel (middelpunt N).

Cirkel N is de basis van een scheeven cilinder; de hor. proj. van een beschr. lijn is evenwijdig aan MA′, de verticale maakt met de as van proj. een hoek van 45° (opening naar rechts).

Cirkel M is de basis van een kegelvlak, welks top A op de beschrijvende lijn van den cilinder ligt, die door M gaat, en A′ tot horizontale projectie heeft.

Bepaal de doorsnijding van het cilindervlak met de beide bladen van het kegelvlak en teeken ten slotte de vert. proj. van den cilinder zoodanig, dat deze massief wordt gedacht, de snijkromme daarop geteekend is en de kegel wordt weggedacht.

Contructielijnen laten staan.

Papier 68 bij 50. As van proj. evenwijdig aan de kleinste zijde van 't papier en 40 boven den benedenrand.

Afstand van M tot linkerkant papier 15 cM.

Acte Wiskunde L. O.

Stelkunde ($1^1/_2$ uur.)

1. Hoe drukt gij op de eenvoudigste wijze de betrekking uit, die tusschen a, b en c moet bestaan, opdat een wortel van de vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

het vierkant zij van den anderen?

2. Los op de vergelijking

$$\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{(1-x^2)}.$$

3. Iemand leent *f* 24000 op voorwaarde, dat hij de geleende som, vermeerderd met samengestelden interest à 5 pCt. 's jaars, zal terugbetalen in 12 gelijke aflossingen betaalbaar aan het einde van ieder jaar, het eerste jaar te beginnen. Hoeveel bedraagt elke aflossing?

Aan het einde van het vijfde jaar wil hij alles, wat hij daarna nog schuldig is, in eens afdoen. Wat moet hij dan betalen?

Planimetrie ($1^1/_2$ uur.)

1. D is het midden van cirkelboog ADB. Een willekeurig punt C van dien cirkelboog is verbonden met A, B en D. Bewijs, dat $AC \times BC = AD^2 - CD^2$ is.

2. Uit het middelpunt O is een cirkel beschreven en in dien cirkel is een middellijn AOB getrokken. Uit B trekt men een koorde BC, die men verlengt met een stuk CD = BC. De koorde BC draait om het punt B. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt G der lijnen AC en OD.

3. Bepaal de verhouding van den inhoud van den regelmatigen vijfhoek tot dien van den driehoek, die ontstaat, als men een hoekpunt van dien regelmatigen vijfhoek verbindt met de uiteinden van de overstaande zijde.

Stereometrie ($1^1/_2$ uur.)

1. Als de spherische afstand van een der hoekpunten van een boldriehoek tot het *midden* der overstaande zijde (*zwaartelijn* op deze zijde) gelijk is aan 90°, dan zijn de andere zijden *elkaars supplement* en deelt genoemde zwaartelijn den door deze zijden ingesloten hoek *middendoor*. Bewijs deze eigenschappen.

2. Op de middellijn AB van een halven cirkel (straal $= r$) is een punt C genomen zóó, dat $AC : CB = 1 : 2$ is. Men vereenigt B en C met een punt P op den omtrek en laat nu de driehoekige figuur, welke door AB, PB en bg AP begrensd is, om AB als as wentelen. Gevraagd het punt P zóó te bepalen, dat de *inhoud* van het verkregen omwentelingslichaam door het oppervlak, dat CP bij wenteling om AB beschrijft, wordt *gehalveerd*.

3. Van een viervlak ABCD hebben drie hoekpunten A, B en C een vasten stand; het vierde hoekpunt D is veranderlijk. Gevraagd de meetkundige plaats van dit hoekpunt te bepalen, als het viervlak de eigenschap bezit volgens een *vierhoek* te kunnen gesneden worden door een vlak, dat de *middens* van de ribben AB en AC bevat.

Gonio- en Trigonometrie ($1^1/_2$ uur.)

1. Welke waarden voor x voldoen aan de vergelijking

$$\frac{5(1-\mathrm{tg}^2 x)}{\cos 2x} - \frac{8\,\mathrm{tg}\,x}{\cos x} = \frac{2(\cos x - \cos 3x)}{\sin^2 2x}?$$

2. Van een vierhoek ABCD zijn gegeven:

$$AB = 300,\ BC = 850,\ CD = 900,$$
$$\text{de diagonaal } AC = 1000 \text{ en } \angle BCD = 80^\circ.$$

Als de diagonalen AC en BD elkaar in O snijden, vraagt men den straal des omgeschreven cirkels van $\triangle$ COD te berekenen. (Wijze van oplossing eerst volledig aan te geven).

Acte Wiskunde R_1. (M. O.)

Algebra (2 uren.)

1. Voor welke waarden van x convergeert de reeks

$$1^4 x + 2^4 x^2 + 3^4 x^3 + \ldots\ldots + n^4 x^n + \ldots\ldots$$

en bepaal voor die waarden de grenswaarden van de som der reeks.

2. de tweeterm $x^{2n}-1$ kan in bestaanbare tweedemachtsfactoren worden ontbonden. Gebruik deze ontbinding om te bewijzen

$$n = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Zou men uit deze uitkomst kunnen afleiden, welke ongeveer de gemiddelde waarde is van alle logarithmesinussen, die in een gewone logarithmentafel voorkomen.

3. Twee verdeelde schalen, wier nulpunten samenvallen, zijn langs elkaar gelegd. De verdeelingen van schaal A zijn 1 dM., die van schaal B zijn $\sqrt{3}$ dM. lang. Men vraagt naar de eerste deelstreep van straal A, die minder dan 1 mM. van de naastbijgelegen deelstreep van schaal B verwijderd is.

Driehoeksmeting (3 uren.)

1. Van een vlakken driehoek is de inhoud = I, de omtrek = $2s$ en een der hoeken = α. Bereken den straal van den omgeschreven cirkel.

2. Welke meetbare waarde van x voldoet aan de vergelijking

$$2\, bgtg\frac{1}{x} + bgtg\frac{1}{x+4} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Van een boldriehoek ABC zijn twee zijden:

$$a = 100^\circ\, 12',\ b = 60^\circ\, 48',$$

terwijl de ingesloten hoek C gelijk is aan de som der hoeken A en B.

Wordt gevraagd den hoek C, alsmede den straal van den omgeschreven cirkel te berekenen?

Analytische Meetkunde (2 uren.)

1. Op de X-as van een rechthoekig coördinatenstelsel neemt men twee punten P, Q aan, zoo dat $OP = OQ = a$ is. Bepaal de meetkundige plaats der hoogtepunten van de driehoeken, die PQ tot grondlijn hebben, terwijl de top op de rechte $A x + B y + C = 0$ ligt.

Wat wordt die meetkundige plaats, als de gegeven rechte evenwijdig loopt met een der coördinatenassen?

2. Bepaal de vergelijking van den cirkel, die door de snijpunten der cirkels $x^2 + y^2 = 2x + 4y + 3$ en $x^2 + y^2 = 9$ gaat, en den cirkel $x^2 + y^2 = 8x + 6y + 29$ in de uiteinden van een zijner middellijnen snijdt.

Beschrijvende Meetkunde (3 uren.)

1. Op de as van projectie worden twee punten A en B, aangenomen. Afstand AB = 12 cM., B ligt rechts van A.

Door het punt A worden twee lijnen getrokken. De eerste, AC, ligt in het verticale vlak en maakt een hoek van 60° met AB; de tweede, AD, ligt in het horizontale vlak en maakt een hoek van 45° met AB. Deze lijnen zijn de doorgangen van een vlak V met de beide projectie-vlakken.

Het punt B is het middelpunt van een bol, waarvan de straal een lengte van 6 cM. heeft.

Gevraagd die punten van den bol te construeeren, die op gelijke afstanden van de beide projectie-vlakken en van het vlak V verwijderd zijn.

2. In het horizontale projectie-vlak is een regelmatige zeshoek ABCDEF gegeven. De zijden AB en DE zijn evenwijdig aan de as van projectie; AB is het dichtst bij de as gelegen. Lengte AB = 4 cM.; afstand van het middelpunt van den zeshoek tot de as is 5 cM. Deze zeshoek is het grondvlak van een regelmatige prisma, waarvan de hoogte $7^1/_2$ cM. is.

Door de zijde CD van den zeshoek en het middelpunt van 't prisma wordt een vlak gebracht. De doorsnede van dit vlak met het prisma te construeeren.

Door dit vlak wordt het prisma in twee deelen verdeeld; men beschouwt het deel tusschen het snijdende vlak en het grondvlak begrepen. Wanneer dit deel met het snijdende vlak om den verticalen doorgang van het vlak gewenteld wordt tot het vlak samenvalt met het verticale projectie-vlak, vraagt men de nieuwe verticale projectie van dit deel te construeeren.

Meetkunde (3 uren.)

1. Gegeven is een cirkel en een tweetal punten A en B, niet op dien cirkel gelegen. Construeer een koorde DE van dien cirkel, evenwijdig met AB en zoo gelegen, dat de rechten AD en BE, of AE en BD elkander in een punt van den cirkel snijden.

2. Een willekeurig viervlak SABC wordt gesneden door een vlak evenwijdig aan het grondvlak ABC; D, E, F zijn de snijpunten van dit vlak met de opstaande ribben SA, SB, SC.

Als het zijvlak evenwijdig aan zich zelf wordt verplaatst, vraagt men naar:

1o. de meetkundige plaats van het snijpunt der vlakken AEF, BFD, CDE;

2o. de meetkundige plaats van het snijpunt der vlakken BCD, CAE, ABF.

3. Gegeven is een vierkant ABCD (zijde $= 2a$) en een punt M in 't vlak van dit vierkant. Bereken de som S der inhouden van de lichamen, voortgebracht door de wenteling der driehoeken MAB, MBC, MCD, MDA, achtereenvolgens om AB, BC, CD en DA.

Toon aan, dat die som S alleen van a en d afhangt als d de afstand is van M tot het middelpunt van het vierkant en bepaal de meetkundige plaats van M, wanneer dit punt zich zoo verplaatst, dat de som S gelijk blijft aan het volume van een kegel, die $4a$ tot hoogte en den afstand MA tot straal van het grondvlak heeft.

Examen Middelbaar Onderwijs K_V.

Analytische Meetkunde.

1. Gegeven zijn de hyperbool $y^2 - x^2 = a^2$, $z = 0$ en de rechte lijnen $x = 0, \frac{z}{c} \pm \frac{y}{a} = 1$.

Door deze drie lijnen kan een bundel kwadratische oppervlakken gelegd worden. Onderzoek of deze bundel paraboloïdes bevat.

Bepaal de meetkundige plaats der polen van het vlak $Ax + By + Cz = 0$ ten opzichte van de oppervlakken van dezen bundel.

2. Men beschouwt een kwadratische kegel, gaande door

de in het vlak YOZ gelegen hoofddoorsnede der ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Deze kegel snijdt de ellipsoïde volgens eene tweede kegelsnede. Wat zal de meetkundige plaats van den kegeltop zijn, wanneer het vlak dier tweede kegelsnede loodrecht op YOZ is?

3. Bewijs, dat voor de punten van elke kromtelijn van het oppervlak $xy = z$ de som (of het verschil) van hun afstanden tot OX en OY standvastig is.

Differentiaalrekening.

1. Gegeven een hoek α. Te bepalen een rechte lijn, zoodanig dat zij met de beenen van den hoek een driehoek begrenst, waarvan de omtrek gegeven $= 2\,S$ is, terwijl de inhoud maximum of minimum moet zijn.

2. Eene functie z der onafhankelijk veranderlijken x en y voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2\,xy^2 \frac{\delta z}{\delta x} + 2\left(y - y^3\right)\frac{\delta z}{\delta y} + x^2 y^2 z = 0.$$

Bewijs dat deze vergelijking na de substitie

$$u = xy \quad v = \frac{1}{y}$$

overgaat

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u^2} + 2\,u\,v^2 \frac{\delta z}{\delta u} + 2\left(v - v^3\right)\frac{\delta z}{\delta v} + u^2 v^2 z = 0.$$

3. Het middelpunt van een cirkel met straal k beweegt zich langs eene kromme lijn, wier vergelijking is $y = f(x)$. Men beschouwt de omhullende van dezen bewegenden cirkel en vraagt van die omhullende den kromtestraal te berekenen in een der beide punten, waar de kromme wordt aangeraakt door den cirkel, wiens middelpunt de gegeven coördinaten x_0 en $y_0 = f(x_0)$ heeft.

Integraalrekening.

1. Wanneer in de differentiaalvergelijking $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$, de funties P en Q voldoen aan de voorwaarde, dat de uitdrukking

$$\frac{1}{\sqrt{Q^3}}\left(2\,PQ + \frac{dQ}{dx}\right)$$

onafhankelijk is van x, kan men door eene substutie $u = f(x)$ de vergelijking overbrengen in eene andere

$$\frac{d^2y}{du^2} + p\frac{dy}{du} - qy = 0$$

met constante cöefficiënten p en q. Men vraagt dit te bewijzen en met behulp van de bewezen eigenschap op te lossen de vergelijking

$$\left(x^2 - 1\right)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - c^2y = 0.$$

2. In het XOY-vlak is een sector OAB gegeven begrensd door twee voerstralen OA en OB ($\angle$ XOA $= \vartheta_1$, $\angle$ XOB $= \vartheta_2$) en door een boog AB eener kromme, wier vergelijking in poolcöordinaten is $r = f(\vartheta)$. Wanneer op elken voerstraal van den boog AB als middellijn in een vlak loodrecht op XOY een halve cirkel beschreven wordt, ontstaat er boven den sector AOB een gebogen oppervlak. Men vraagt nu te bewijzen dat de grootte van dit oppervlak wordt uitgedrukt door de integraal

$$\frac{\pi}{4}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f(\vartheta)\sqrt{\{f(\vartheta)\}^2 + \{f^1(\vartheta)\}^2}\, d\vartheta.$$

3. Men vraagt aan te toonen, dat voor $a > 1$ de integraal

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}(e^x - 1 - x)}{x^2}\, dx$$

werkelijk een beteekenis heeft. De waarde van die integraal te bepalen door de berekening van $\frac{d^2u}{da^2}$.

Beschrijvende Meetkunde.

1. Gegeven zijn eene omwentelingshyperboloïde en een bol. Gevraagd de beide gemeenschappelijke raaklijnen dier oppervlakken te construeeren, die door een gegeven punt P op de omwentelingsas der hyperboloïde gaan.

De as der hyperboloïde is loodrecht op H en heeft een afstand van 5 c.M. tot V. Verder is van het oppervlak gegeven ééne beschrijvende lijn l, die evenwijdig aan V en op een afstand van 7 c.M. daarvan verwijderd is, een hoek van 45° maakt met H, terwijl de verticale projectie van l de verticale projectie van de as snijdt in een punt, 5 c.M. boven H.

De bol heeft een straal van 5 c.M. en raakt zoowel de beide projectievlakken als de as der hyperboloïde aan. Het punt P ligt 8 c.M. boven H.

H is het horizontale, V het verticale projectievlak.

2. Gegeven:

1e. Een omwentelingscilinder, op H staande en welks as 7 c.M. vóór V ligt. Straal grondcirkel = 4 c.M.; door de middellijn van dezen cirkel, die loodrecht op de as van projectie staat, gaat een vlak dat met H een hoek van 60° insluit (opening van den hoek naar rechts) en dus den cilinder volgens eene ellips snijdt. Deze ellips en de beschrijvende lijn van den cilinder, die het dichtst bij V gelegen is, zijn de richtlijnen van een regelvlak, dat H tot richtvlak heeft.

2e. Een bol, welks middelpunt samenvalt met dat van den grondcirkel van den cilinder en welks straal 7 c.M. is.

Construeer:

a. De punten der doorsnijding van beide oppervlakken, die op eene hoogte van 4 c.M. boven H liggen en in het punt, dat het verst van V verwijderd is, de raaklijn dier doorsnede.

b. In eene afzonderlijke teekening de horizontale projectie der geheele doorsnede.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5WI C001
WISKUNDIG TIJDSCHRIFT
2 1905-06
3 0112 016855220